Latvijas Universitāte
Datorikas fakultāte
Specseminārs "Eksperimentālā matemātika"

Naturālo skaitļu sarežģītība: jauni rezultāti

K. Balodis, J. Čerņenoks, J. Iraids, R. Opmanis, M. Opmanis, K. Podnieks

LU Zinātniskā konference, 2011.gada 4.februārī

Naturālā skaitļa N sarežģītība ||N||

3=1+1+1, ||3||=3;

6=2*3=(1+1)*(1+1+1), ||6||=5;

14=2*7=2*(2*3+1), ||14||=8.

Definīcija. ||N|| = vieninieku skaits visīsākajā izteiksmē no 1, +, *, (,), kuras vērtība ir N. (Sk. A005245 Sloane enciklopēdijā)

Teorēma. $3\log_3 N \le ||N|| \le 3\log_2 N$.

3^3=27=(1+1+1)*(1+1+1)*(1+1+1).

Tas ir labākais veids kā attēlot trijnieka pakāpes!

Teorēma. $||3^k||=3k$.

2^5=32=(1+1)*(1+1)*(1+1)*(1+1)*(1+1)

Vai tas ir labākais veids kā attēlot divnieka pakāpes?
Hipotēze. $||2^k||=2k$.

To nevienam vēl nav izdevies pierādīt. Tas ir šī pētījumu virziena lielākais **izaicinājums!** Hipotēze apstiprinās visiem k≤39 (J. Iraids).

Ģenerālā hipotēze

Kuriem skaitļiem labākā izteiksme ir vieninieku summu reizinājums (1+1+...)* ... *(1+1+...)?

||2||=2; ||3||=3;

5 = 1+1+1+1+1; ||5||=5;

7=(1+1)*(1+1+1)+1, ||7||=6<7. Un tā visiem tālākajiem pirmskaitļiem.

Teorēma (R. Opmanis). Ja N labākā izteiksme ir vieninieku summu reizinājums (1+1+...)* ... *(1+1+...), tad $N=2^a3^b5^c$.

Vai tas nozīmē, ka vienmēr, $||2^a3^b5^c||=2a+3b+5c$?

Fakts (J. Iraids). 5^6 =15625 labākā izteiksme satur 29 vieniniekus:

$1+2^3*3^2*217=1+2^3*3^2*(1+2^3*3^3)$.

Izteiksme 5*5*5*5*5*5 satur 30 vieniniekus. Tātad

$||5^6||=29<6*5$, un ja c>5, tad $||2^a3^b5^c||<2a+3b+5c$.

Ģenerālā hipotēze.

Ja a+b+c>0 un c≤5, tad

$$||2^a3^b5^c|| = 2a+3b+5c.$$

Hipotēze apstiprinās visiem $2^a3^b5^c \le 10^{12}$ (J. Iraids).

Ko ir izdevies **pierādīt**?

$||3^b||=3b$;

$||2^a3^b||=2a+3b$, ja a≤10; (R. Opmanis)

$||2^a3^b5^1||=2a+3b+5$, ja a≤3; (R. Opmanis)

$||2^a3^b5^2||=2a+3b+10$, ja a≤2. (R. Opmanis)

Vēl viens interesants fakts: ir viegli pierādīt, ka

$$||3^b+1||=||3^b+3||=3b+1.$$

Un ka

$$3b+1\le||3^b+2||\le 3b+2.$$

(J. Iraids) Visiem b≤25, $||3^b+2||=3b+2$, bet pierādīt to visiem b nav izdevies.

||N|| vērtības visiem $N\le 10^{12}$

Izmantojot parastu galda datoru, M. Opmanis aprēķināja ||N|| līdz N=997 000 000.

Izmantojot stipri jaudīgāku datoru (15 GB atmiņa utt.), J.Iraids aprēķināja ||N|| līdz $N=10^{12}$.

Rēķins ilga 2 ½ nedēļas. Rezultāti glabājas uz tīmekļa servera kā 1 TB liels fails, kur baitā Nr. N glabājas ||N|| vērtība (tā nepārsniedz 89).

Konkrētas ||N|| vērtības var uzzināt adresē: http://susurs.mii.lu.lv/ExpMath/.

Apgāztās hipotēzes

Iegūtos datus varam izmantot dažādu slavenu un mazāk slavenu hipotēžu pārbaudei.

Richard K. Guy grāmatā **Unsolved problems in number theory** (3rd edition, 2004) ir minētas 2 hipotēzes:

ja p ir pirmskaitlis, tad:

$$||p|| = 1+||p-1||;$$

(t.i. jāsāk ar p = 1+ ...) un

$$||2p|| = \min\{2+||p||, 1+||2p-1||\}.$$

(t.i. jāsāk vai nu ar 2p=(1+1)*..., vai ar 2p=1+...)

Pirmo hipotēzi izdevās apgāzt M. N. Fuller: mazākais "sliktais" p ir

$p = 353\,942\,783 = 6+37(2+3^4(1+2*3^{10})) =$
$=2*3+(1+2^23^2)(2+3^4(1+2*3^{10}))$,

||p|=63, 1+||p−1||=64.

Otro hipotēzi izdevās apgāzt J. Iraidam: mazākais "sliktais" p ir

p = 5 139 300 347

$2p = 6+(1+7*3^{14})(1+17*2*3^2) =$

$= 2*3+(1+3^{14}(1+2*3))*(1+2*3^2(1+2^4))$

||2p||= ||10 278 600 694||=72

2+||p|| = 2+||5 139 300 347||=73

1+||2p−1|| = 1+||10 278 600 693||=73

Apstiprinātās hipotēzes

par virkni A005520(n) – mazākais N ar sarežģītību ||N||=n.

Hipotēze. A005520(n) ir pirmskaitlis, izņemot pie n = 1, 4, 7, 10, 25.

Hipotēze. A005520(n) ≡119 (mod 120), visiem n>44. [120=5!]

(J. Iraids) Abas hipotēzes apstiprinās līdz n=89.

Par $||2^N-1||$

Ir zināms, ka $||2^N|| \le 2N$ (hipotēze: =2N). Bet kas sanāk ar $||2^N-1||$, ja atņemšanas operāciju neizmantojam?

Teorēma (K. Balodis). Ja N>1, tad

$$||2^N-1|| \le 2N + 2\log_2 N - 2.$$

(J. Iraids) No N=19 līdz N=39 apstiprinās labāks vērtējums:

$$2N+2 \le ||2^N-1|| \le 2N + \log_2 N.$$

Ja N=x+y...

Teorēma. Ja N labākā izteiksme ir summa, tad tās mazākais saskaitāmais ≤ $N^{0,59}$.

Realitāte tālu pārspēj šo novērtējumu...

Lielākajai daļai skaitļu labākā izteiksme ir reizinājums.

Ja N labākā izteiksme ir summa, tad mazākais saskaitāmais parasti ir 1.

[Tas nevar būt 2, 3, 4, 5, 7.]

Piemērs: 7 = 1+2*3.

(J. Iraids) Ļoti reti tas ir 6 (=2*3).

Piemērs: $353\,942\,783 = 6+37(2+3^4(1+2*3^{10}))$.

Līdz 10^{12} tādu skaitļu ir tikai 21360.

Līdz 10^{12} ir tikai 3 skaitļi, kam mazākais saskaitāmais ir 8 (=2*2*2):

341 317 451 698,

474 934 483 834,

782 747 233 558.

Līdz 10^{12} ir 118 skaitļu, kam mazākais saskaitāmais ir 9 (=3*3),

mazākais no tiem ir 16 534 727 299.

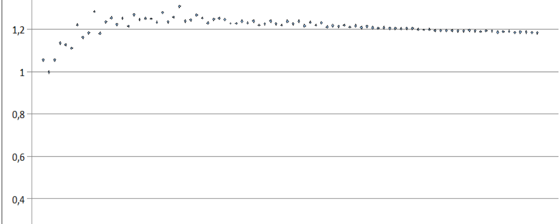
Citādi mazākie saskaitāmie līdz 10^{12} nav sastopami.

Ko tālāk?

Tā kā $3\log_3 N \le ||N|| \le 3\log_2 N$, tad funkcija

$$||N||_{\log}=\frac{||N||}{3\log_3 N}$$

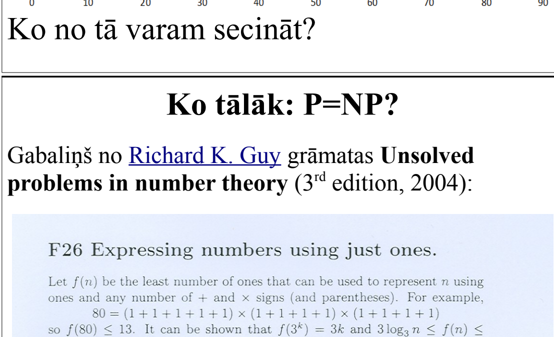
pieņem vērtības segmentā [1, 1.58496...]. Kā šīs vērtības izvietojas? J. Iraida iegūtais grafiks (89 punkti, x-ass satur ||N|| vērtības, y-ass – $||N||_{\log}$ maksimumu pie dotās ||N|| vērtības):



Ko no tā varam secināt?

Ko tālāk: P=NP?

Gabaliņš no Richard K. Guy grāmatas **Unsolved problems in number theory** (3rd edition, 2004):



F26 Expressing numbers using just ones.

Let $f(n)$ be the least number of ones that can be used to represent n using ones and any number of + and × signs (and parentheses). For example,

$$80 = (1+1+1+1+1)\times(1+1+1+1)\times(1+1+1+1)$$

so $f(80) \le 13$. It can be shown that $f(3^k) = 3k$ and $3\log_3 n \le f(n) \le 5\log_3 n$ where the logs are to base 3. Does $f(n) \sim 3\log_3 n$?

Daniel Rawsthorne has shown that $f(n) = 2a + 3b$ when n is of the form 2^a3^b and not greater than 3^{10}. Is this true for larger such n ?

Is it always true that for a prime p, $f(p) = 1 + f(p-1)$? And that $f(2p) = \min\{2 + f(p), 1 + f(2p-1)\}$?

Don Coppersmith notes that $f(n)$ has an upper bound of $3\log_2(n)$ which is slightly less than $5\log_3(n)$. The former comes from Horner's rule on binary representation; the latter from Horner's rule on ternary representation. Jeff Lagarias reports that a problem of Shub & Smale is to let $f_w(m)$ be the minimum number of steps needed to generate m using 1, addition and multiplication, and $f_s(m)$ the minimum number using 1, −1, addition, subtraction and multiplication, then Conjecture A is that $f_s(n!) \gg_k (\ln n)^k$ for each $k \ge 1$ and Conjecture B is the same for $f_w(n!)$ Conjecture A implies P≠NP in the Blum-Shub-Smale real number model of computation.

J. H. Conway & M. J. T. Guy, π in four 4's, *Eureka*, **25**(1962) 18–19.
Richard K. Guy, Some suspiciously simple sequences, *Amer. Math. Monthly*, **93**(1986) 186–190; and see **94**(1987) 965 & **96**(1989) 905.
K. Mahler & J. Popken, On a maximum problem in arithmetic (Dutch), *Nieuw Arch. Wiskunde*, (3) **1**(1953) 1–15; *MR* **14**, 852e.
Daniel A. Rawsthorne, How many 1's are needed? *Fibonacci Quart.*, **27**(1989) 14–17; *MR* **90b**:11008.

OEIS: A003037, A005245, A005520, A025280.