[Uz personīgo lapu]

Kā iesākās bezgalīgo kopu teorija?

Lekcijas kursā “Matemātikas pamatjēdzieni”

Kārlis Podnieks, LU

Literatūra:

K. Podnieks, What is Mathematics: Gödel's Theorem and Around. Edition 2015, 2.nodaļa.

Senajā Grieķijā...

6.gadsimts PMĒ. **Pitagors** un viņa skola: Samosas sala, pēc tam – Krotonas pilsēta Itālijas dienvidos.

1. Vai [naturālie] skaitļi kaut kur beidzas? Kurā brīdī radās nojausma, ka tie nebeidzas? Nojausma par bezgalību...

Pirmā (vai otrā – pēc Pitagora teorēmas) matemātikas teorēma: Pirmskaitļu ir vairāk par jebkuru iepriekš uzdotu daudzumu.
[Mēs šodien teiktu: pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.]

Pierādījums. Skaitlis $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$ nedalās ar $p_1, p_2, \ldots p_k$, tātad tas dalās ar kādu citu pirmskaitli. Q.E.D.

2. Cik punktu ir taisnes nogrieznī? Galīgs skaits? Un tie visi ir vienādi? Bezgalīgu skaitu punktu taisnes nogrieznī Pitagora laikā neviens iedomāties nevarēja...

Sk. Google attēli: *square diagonal*

Bet, ja kvadrāta malā ir *a* vienādi punkti un diagonālē – *d* tādi pat vienādi punkti, tad $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, tātad $\left(\frac{d}{a}\right)^2 = 2$, kas nav iespējams [mēs teiktu, ka $\sqrt{2}$ ir iracionāls skaitlis].

Pretruna. Ko darīt? Aizliegt šo info izplatīt? Bet, varbūt, vienkārši secināt, ka **nav labi domāt**, ka nogriežņi sastāv no vienādiem punktiem galīgā skaitā.

Tā izveidojās pirmā krīze matemātiķu domāšanā. Īsta bezgalības jēdziena vēl nebija. Bezgalīgu skaitu punktu taisnes nogrieznī tai laikā neviens iedomāties nevarēja...

Grieķu matemātiķu atrastā izeja no situācijas: uzskatīt, ka nogriežņi nesastāv no punktiem, punktus tajos var tikai atzīmēt.

Uz tādiem pamatiem izdevās uzbūvēt pieklājīgu ģeometrijas teoriju: Eidoksa proporciju teorija, Eiklīda "Elementi", 5.grāmata (4.gadsimts PMĒ).

Galileo (1564-1642)

Galileo paradokss (1638.gads): No vienas puses, [naturālo] skaitļu **kvadrātu ir daudz mazāk** par pašiem skaitļiem, jo tie ir sastopami arvien retāk:

1, 2, 3, **4**, 5, 6, 7, 8, **9**, 10, 11, 12, 13, 14, 15, **16**, 17, 18, 19, 20, ...

No otras puses: katram skaitlim ir kvadrāts, un katram kvadrātam ir atbilstošais skaitlis, kura kvadrāts tas ir:

1, 4, 9, 16, 25, ...

1, 2, 3, 4, 5, ...

Tātad visus naturālos skaitļus var sanumurēt, par numuriem izmantojot kvadrātus! [Galileo pirmais iedomājās bezgalīgām kopām izmantot to pašu lielumu salīdzināšanas metodi, ko izmanto galīgam kopām.]

Tātad **kvadrātu ir tikpat, cik skaitļu**? Pretruna? [Tā ir pretruna ar ierasto intuīciju jeb fīlingu, kas izveidojies, darbojoties ar galīgām kopām: "daļa ir mazāka par veselo".]

Galileo secināja, ka "bezgalīgus daudzumus" nav jēgas salīdzināt. Salīdzināt var tikai "galīgus daudzumus".

240 gadu vēlāk, 1870-jos gados **Georgs Kantors** piedāvāja citu risinājumu: uzskatīsim, ka kvadrātu tiešām ir tikpat, cik pašu skaitļu, un **ka tam nebūs kaitīgu seku**. (Tikai būs jāatsakās no domas, ka daļa ir vienmēr mazāka par veselo...)

Bernards Bolcano (1781-1848)

1817.gadā viņš pierādīja teorēmu, ko tagad sauc

Bolcāno-Veierštrāsa teorēma. Katrai ierobežotai bezgalīgai reālu skaitļu virknei eksistē bezgalīga konverģenta apakšvirkne [mūsdienu formulējums].

Google attēli: *bolzano weierstrass theorem*

Pierādījums. Visa virkne A atrodas kādā segmentā [a, b], veidojam tai apakšvirkni A'. Dalām segmentu [a, b] uz pusēm. Vienā no pusēm [a', b'] atrodas bezgalīgi daudz virknes A locekļu, vai ne? [Jauns fīlings? Agrāk neviens tā nejautāja...] Vienu no tiem ņemam par virknes A' pirmo locekli a_1 . No virknes M izmetam visus to locekļus, kas virknē parādās agrāk par a'. Pēc tam atkārtojam to pašu, dalot uz pusēm segmentu [a', b'], utt.

N-jā solī mēs iegūstam virknes A' n-to locekli a_n , un visi turpmākie A' locekļi atradīsies segmentā, kura garums ir $\frac{b-a}{2^N}$. Skaidrs, ka virkne A' konverģē, vai ne? Vai tā konverģē uz kādu punktu? Varbūt - uz "caurumu"? Uz punktu! [Tas bija jauns fīlings? A' konvergē uz kādu punktu, nevis uz caurumu... Par cauruma iespējamību Bolcano pat neiedomajās.] Q.E.D.

Faktiski te tiek veidots jauns priekšstats:

Kas notiek, ja (galīgā) taisnes nogriezni atzīmē bezgalīgi daudz punktu? Atbilde: šie punkti "kondensējas" ap vismaz vienu nogriežņa punktu.

Atveram grāmatas sadaļu 2.1.

Punktu, kuram jebkurā (patvaļīgi mazā) apkārtnē atrodas bezgalīgi daudz kopas K punktu, sauc par kopas K **kondensācijas punktu** (šis punkts pašai kopai K var nepiederēt).

Bolcāno-Veierštrāsa teorēma (cits formulējums): Katrai ierobežotai bezgalīgai punktu kopai eksistē vismaz viens kondensācijas punkts.

Bezgalīgo kopu teorijas dzimšanas gads: **1872**

Georgs Kantors (1845-1918)

Risinot konkrētu matemātisku problēmu (par Furjē rindu konverģences apgabaliem), Kantoram izveidojās fīlings, ka bezgalīgās punktu kopas uz taisnes var būt arī **ļoti ļoti sarežģītas**.

Sk. grāmatas sadaļu 2.1: ja arī pašu kondensācijas punktu ir bezgalīgi daudz, tad arī tie kondensējas – un tas ir “2.kārtas kondensācijas punkts”. Utt., n-tās kārtas kondensācijas punkti... Un kas ir *bezgalīgas kārtas* kondensācijas punkts?

Uzdevums 2.1. Katram k≥1 aplūkosim kopu

$$Q_k=\{\frac{1}{n_1}+...+\frac{1}{n_k}\,|\,n_1,...,n_k\geq 1\}\quad .$$

Pierādiet, ka šai kopai ir tieši viens k-tās kārtas kondensācijas punkts – skaitlis 0. Un ka kopai visu kopu Q_k apvienojumam skaitlis 0 ir bezgalīgas kārtas kondensācijas punkts.

Tā Kantoram – 2500 gadu pēc atteikšanās no priekšstata, ka taisnes nogrieznis sastāv no punktiem – šis priekšstats atkal sāka veidoties: **taisnes nogrieznis tiešām sastāv no punktiem**, un piemēram, punkti ar racionālām koordinātēm veido kopu utt.

Kā salīdzināt bezgalīgās kopas?

Galileo ieviestais kopu lieluma salīdzināšanas princips: vienu kopu mēģināt sanumurēt, par numuriem izmantojot otras kopas elementus.

Salīdzinot naturālo skaitļu kvadrātu kopu ar visu naturālo skaitļu kopu, Galileo secināja, ka salīdzināt bezgalīgas kopas nav jēgas, jo apakškopa var iznākt “vienāda” ar pašu kopu. Tas bija pretrunā ar ierasto intuīciju.

Kantors, sastapies ar bezgalīgo kopu daudz lielāku dažādību nekā Galileo, nolēma, ka to salīdzināšana Galileja “stilā” nekādu kaitējumu nodarīt nevarēs, ja bezgalīgām kopām atteiksimies no idejas, ka “veselais vienmēr ir lielāks par katru savu daļu”.

Un uzreiz radās sākotnējā dabiskā hipotēze: racionālo skaitļu **“noteikti” ir vairāk** nekā naturālo, “jo” tie uz taisnes ir novietoti **blīvi**. Diemžēl, tūlīt atklājās pretējais...

1873.gada rudens: negaidīti atklājumi!

1) Racionālo skaitļu ir tikpat daudz kā naturālo.

Pierādījums: mūsdienu datoriķiem – ļoti viegls. Skaitļu pāra kodēšana ar vienu skaitli. Ideja (uzminiet algoritmu):

$$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{2}{1};\frac{1}{3};\frac{3}{1};\frac{1}{4};\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{4}{1};\ldots$$

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; ...

2) Nogriežņa punktu [reālo skaitļu] ir vairāk nekā naturālo skaitļu.

Divi pierādījumi:

1. Ar nogriežņu dalīšanu 3 daļās (sk. grāmatā).

2. Izmantojot skaitļu decimālos pierakstus. Pieņemsim, ka intervāla (0, 1) visus punktus var sanumurēt ar naturāliem skaitļiem. Ņemam sanumurēto punktu koordināti virkni, piemēram:

0, **0**234...

0, 5**1**32...

0, 87**2**9...

0, 649**0**...

...

Un ar **diagonālmetodi**, izmantojot tikai ciparus 0, 1, veidojam skaitli, kas šajā virknē nebūs sastopams skaitlis:

0, 1001...

(Tā kā ciparu 9 neizmantojam, tad nevaram iegūt 0,xxxxx999...).

Esam ieguvuši pretrunu. Q.E.D.

[Diagonālmetodi vēl sastapsiet (ja vēl neesat sastapuši) – piemēram, algoritmu teorijā.]

Secinājums: Ne visas bezgalīgās kopas ir "vienāda lieluma".

Eksistē vismaz divas dažāda lieluma bezgalības!

Ko precīzi nozīmē: salīdzināt bezgalīgās kopas?

Galileo principu Kantoram vajadzēja vispārināt: kā salīdzināt kopas, kuru elementus nevar sanumurēt ar naturāliem skaitļiem?

Pirmā vispārīgā definīcija:

Kopas A, B ir "vienāda lieluma" (vienāda apjoma), **ja kopas B elementus var sanumurēt, par numuriem izmantojot kopas A elementus.**

Precīzāk, te runa ir par savstarpēji viennozīmīgu atbilstību:

Kopas A, B ir "vienāda lieluma" (vienāda apjoma, $|A|=|B|$), ja eksistē [visur definēta] funkcija $f:A\to B$:

a) kas ir viennozīmīga, t.i. $\forall x,y[x\neq y\to f(x)\neq f(y)]$;

b) kuras vērtības noklāj visu kopu B:

$$\forall y[y\in B\to \exists x(x\in A\wedge f(x)=y)] .$$

Vēl divas vispārīgas definīcijas:

Kopas A apjoms nepārsniedz kopas B apjomu $(|A|\leq|B|)$ **,** ja eksistē viennozīmīga funkcija $f:A\to B$.

Kopas A apjoms ir mazāks par kopas B apjomu $(|A|<|B|)$ **, ja** $|A|\leq|B|$ un $|A|\neq|B|$.

Šrēdera-Bernšteina teorēma (Kantors to nojauta, bet pierādīta tā tika tikai 1897.gadā). Ja $|A| \leq |B|$ un $|A| \geq |B|$, tad $|A| = |B|$.

[Bez šīs teorēmas kopu apjomu salīdzināšana būtu nesakarīga...]

Salīdzināsim “punktu skaitu”:

Google attēli: *comparing segments*

dažāda garuma nogriežņos,

nogrieznī ar un bez galapunktiem,

nogrieznī bez gala punktiem un bezgalīgā taisnē, (sk. Google attēlos: *arctan*)

nogrieznī un riņķa līnijā utt.

Visi šie “skaiti” iznāk vienādi!

Uzdevums 2.2. Construct a one-to-one correspondences between: a) two segments (of different length), b) between the segment [a, b] (i.e. the set {x | a≤x≤b}) and the interval (a, b) (i.e. the set {x | a<x<b}), c) between an interval and the entire set of all real numbers.

1877.gads:

Nākamais solis: salīdzināsim punktu skaitu **divdimensiju** figūrās un viendimensiju objektos.

Dabiskā sākotnējā hipotēze: kvadrātā “noteikti” ir vairāk punktu nekā tā malā (taisnes nogrieznī). Kantors ilgi cīnījās, lai to pierādītu. Līdz iedomājās pierādīt pretējo:

Teorēma. Kvadrāta iekšienē ir tikpat daudz punktu kā kvadrāta malā.

Pierādījums sanāk viegls, sk. grāmatā.

Uzdevums 2.3. A one-to-one correspondence between the rectangle [0, 1)x[0, 1) and a subset of the segment [0, 1] can be produced easily from the decimal fractions of coordinates:

(x, y) → z

x = 0.abcd...

y = 0.ABCD...

z = 0.aAbBcCdD...

Atrodiet šajā pierādījumā defektu un izlabojiet to.

Visā riņķī un visā plaknē arī ir tikpat daudz punktu, cik intervālā (0,1).

Arī **kubā**, lodē un visā (3- vai *n*-dimensiju) telpā ir tikpat daudz punktu, cik intervālā (0,1).

1878.gads: kontinuuma hipotēze

Iedomājamies patvaļīgu ***bezgalīgu*** punktu kopu X uz taisnes nogriežņa.

1) "Lieluma ziņā" tā *nebūs mazāka* par visu naturālo skaitļu kopu N: $|X| \geq |N|$.

Pierādījums-uzdevums.

2) "Lieluma ziņā" tā *nebūs lielāka* par nogriežņa visu punktu kopu R: $|X| \leq |R|$.

Mēs jau zinām, ka $|N| < |R|$. Tāpēc

3) Jautājums: Vai "lieluma ziņā" bezgalīgā kopa X varētu būt **"pa vidu" starp N un R**? T.i. lielāka par visu naturālo skaitļu kopu, bet mazāka par nogriežņa visu punktu kopu?

Citiem vārdiem: vai eksistē tāda kopa X, kam $|N| < |X| < |R|$?

Kontinuuma hipotēze (CH): Tādas "pa vidu" kopas neeksistē: ja X ir bezgalīga punktu kopa, tad $|X| = |N|$ vai $|X| = |R|$.

Kantors pie šīs hipotēzes nonāca, būvējot visdažādākās punktu kopas. Visas tās iznāca vai nu 1.tipa, vai 2.tipa, un neviena nebija vidējā – 3.tipa. Pēc tam viņš daudzus gadus centās šo hipotēzi pierādīt, bet nesekmīgi.

Šodien mēs zinām, ka viņam tas nevarēja izdoties, un arī mums nevar izdoties... [Vai Jums jau tagad ir ideja, kā varētu pierādīt, ka tas nevar izdoties?]

"Bezgalību ir bezgalīgi daudz"

Sākumā Kantors konstatēja, ka eksistē "vismaz divas dažādas bezgalības".

Vispārinot savu metodi, viņš pierādīja, ka “dažādu bezgalību ir bezgalīgi daudz”.

Kopas K visu apakškopu kopa (*power-set*):

$$P(K)=\{y \mid y\subseteq K\}$$

Sk. Google attēlus: *power set*.

Kombinatorika: ja K ir galīga kopa no *n* elementiem, tad P(K) sastāv no 2^n elementiem. Jeb: $|P(K)|=2^{|K|}$ tātad, protams,

$$|K|<|P(K)| .$$

Kantora teorēma (vispārīgais gadījums, kad kopa K var būt kā galīga, tā bezgalīga). Kopu P(K) nevar sanumurēt, par numuriem izmantojot kopas K elementus. Jeb: $|K|<|P(K)|$ gan galīgām, gan bezgalīgām kopām.

Pierādījums. 1) $|K|\leq|P(K)|$, jo funkcija $g(x)=\{x\}$ attēlo kopu K kopā P(K).

2) Paņemsim jebkuru funkciju $f:K\to P(K)$, un parādīsim, ka tās vērtības nevar noklāt visu kopu P(K). No tā sekos, ka $|K|<|P(K)|$, un teorēma būs pierādīta.

Sekojot **diagonālmetodes** idejai, aplūkosim K apakškopu $y=\{z \mid z\in K\wedge z\notin f(z)\}$.

Skaidrs, ka $y\subseteq K$, t.i. $y\in P(K)$. Parādīsim, ka *y* nevar būt funkcijas *f* vērtība. Tiešām, pieņemsim no pretējā, ka kādam $z\in K, y=f(z)$. Noskaidrosim, vai $z\in y$.

Ja $z\in y$, tad $z\in f(z)$ un $z\notin y$. Pretruna.

Ja $z\notin y$, tad $z\notin f(z)$ un $z\in y$. Atkal pretruna. Q.E.D.

Secinājums. Jebkurai bezgalīgai kopai eksistē par to “vēl bezgalīgākas” kopas: |K|<|P(K)|<|P(P(K))|<...

Un visu šīs virknes kopu *apvienojums* ir vēl lielāks par katru no tām... Utt.

1895.gads: Kantora paradokss

Tūlīt pēc savas vispārīgās teorēmas pierādīšanas Kantors saprata, ka ir “nokļuvis grūtā situācijā”. Tiešām, paņemsim Kantora teorēmā K=V, kur

V=visu kopu kopa.

Tātad $|V|<|P(V)|$. Bet tā kā V satur pilnīgi visas kopas, tad $P(V)\subseteq V$ un tāpēc nevienādība $|V|<|P(V)|$ nav iespējama!

Paša Kantora acīs šī pretruna padarīja viņa mūža darbu (kopu teoriju) par apšaubāmu... Pēc mocībām ar kontinuuma problēmu – jauna mocība... Kā tas viņam beidzās? Sk. Vikipēdijā: Georg Cantor.

1901.gads: Rasela paradokss

1901.gadā Bertrans Rasels izgudroja vēl vienkāršāku pretrunas izvedumu kopu teorijā, kas neprasa nekādu nopietnu teorēmu izmantošanu. Aplūkosim šādu kopu:

$$R=\{K \mid K\notin K\}.$$

Skaidrs, ka $\emptyset\notin\emptyset$, tāpēc $\emptyset\in R$.

Un tā kā $V\in V$, tad $V\notin R$

Noskaidrosim, vai $R\in R$.

Ja $R\in R$, tad $R\notin R$. Pretruna.

Ja $R\notin R$, tad $R\in R$. Atkal pretruna.

Secinājums.

Kopu teorijas pamatos kaut kas nebija kārtībā!

Ko darīt?

Izeja no situācijas tika atrasta 1908.gadā...

Kantora (pretrunīgās) kopu teorijas formalizācija

Lasiet grāmatas sadaļu 2.2.

Sāksim ar mēģinājumu Kantora kopu teoriju **formalizēt**.

Predikātu valoda kopu teorijai tikai divas predikātu konstantes:

$$x \in y \,;\, x = y \,.$$

Visu pārējo vajag izteikt ar loģikas līdzekļiem, t.sk. kvantoriem.

Šo vienkāršo valodu nevajag novērtēt par zemu, izrādās, ka tā ir **universāla – tajā var izteikt jebkuru matemātisku apgalvojumu!** (Matemātiķi visai ātri pamanīja, ka visas matemātiskās struktūras var uzmodelēt kopu teorijā.)

Formulu piemēri:

$$x = \emptyset \;:\; \forall y \neg(y \in x) \;;$$

Tukšās kopas simbols kopu teorijas valodai nepieder, bet to var ievest caur definīciju. Ja kādā formulā $F(\emptyset)$ ir izmantots šis simbols, tad, ja vajag, no tā var atbrīvoties, rakstot $F(\emptyset)$ vietā formulu $\exists x (F(x) \wedge \forall y \neg(y \in x))$.
Līdzīgā veidā var iegūt tiesības izmantot citus pierastos kopu teorijas konstrukcijas:

$$x = \{\emptyset\} \;:\; \forall y (y \in x \leftrightarrow y = \emptyset)$$ jeb

$$\forall y (y \in x \leftrightarrow \forall z \neg(z \in y)) \;;$$

$$x = \{y, z\} \;:\; \forall u (u \in x \leftrightarrow u = y \vee u = z) \;;$$

$$x \subseteq y \;:\; \forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \;;$$

$$x \subset y \;:\; \forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \wedge \exists z (z \in y \wedge \neg(z \in x))$$

$$x = y \cap z \;:\; \forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y \wedge u \in z) \;;$$

$$x = y \cup z \;:\; \forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y \vee u \in z) \,.$$

Kāpēc kopu veidošanai nevajag atomus?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$$

Ja nekas neeksistē, tad eksistē tukšā kopa 0. Un tātad eksistē kopa {0}, kuras vienīgais elements ir tukšā kopa. Tātad eksistē arī kopa {0, {0}}, kas satur divus dažādus elementus. Utt. iegūstot bezgalīgi daudz dažādu kopu:

$$x_0 = 0;\ x_1 = \{0\};\ x_2 = \{0, \{0\}\};\ ...;\ x_{n+1} = x_n \cup \{x_n\};\ ...$$

Tātad, pieņemot, ka nekas neeksistē, var iegūt bezgalīgi daudz dažādu kopu.

Uzdevums. Kā visvieglāk uzrakstīt apgalvojumu "x ir bezgalīga kopa"? Ideja: atņemot x pēc kārtas pa vienam elementam, nekad nepaliks tukša kopa. Jāizmanto formula $y \subset z$.

Kantora kopu teorijas aksiomas

1) Ekstensionalitātes aksioma (specifisks vienādības jēdziens kopu teorijā – kopu vienādība):

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y) .$$

2) Aptveršanas (*comprehension*) aksiomu shēma (F(x) – jebkura formula kopu teorijas valodā ar brīvu mainīgo x):

$$\exists x (x = \{ y | F(y) \}) ,$$

jeb, precīzāk:

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow F(y)) .$$

Formulā F var būt arī citi mainīgie, tie tad spēlē *parametru* lomu. Piemēram, $\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \neg (y = z))$ visu y-u kopa, izņemot z.

3) Izvēles (*choice*) aksioma (sk. zemāk).

Izrādās, ka no šīs vienkāršās aksiomu sistēmas **var izvest visu matemātiku!** Bet – šī sistēma ir pretrunīga!

Rasela paradoksa formālais izvedums no aptveršanas aksiomu shēmas:

$\exists R \forall y (y \in R \leftrightarrow \neg (y \in y))$, tātad *y* vietā liekot R:

$R \in R \leftrightarrow \neg (R \in R)$.

Ko darīt? Kas ir situācijas cēlonis? Kur meklēt izeju?

1908.gads: Cermelo-Frenkela aksiomas

Atveram grāmatas sadaļu 2.3.

Ernsts Cermelo (1908) un Abrahams Frenkels (1921).

Ideja: pretrunu cēlonis – aptveršanas aksiomu shēma ir **pārāk vispārīga**, tāpēc izeja no situācijas – **ierobežot šo shēmu**, atļaujot tikai tos gadījumus, kas reāli nepieciešami matemātisku struktūru būvēšanai.

Kopu teorija ZFC

Izmantojam to pašu formālo valodu, kurā ir tikai divas predikātu konstantes: $x \in y \,;\, x = y$.

Saglabājam **ekstensionalitātes aksiomu.**

Klases un kopas

Katra formula F(x) definē **klasi** A={x | F(x)}, **kas ne vienmēr būs kopa**. (F var būt arī parametri.)

Kopa ir klase, kas ir citas klases elements.

Ja klase nav citas klases elements, tad to sauc par īstu klasi (*proper class*).

Ja rakstām $x \in A$, tas nozīmē vienkārši F(x).

Klasēm var aplūkot šķēlumus, apvienojumus, papildinājumus, piemēram:

$A \cup B = \{x \mid F(x) \vee G(x)\}$, $\bar{A} = \{x \mid \neg F(x)\}$ utt.

Rasela paradokss noved pie pirmās īstās klases.

Rasela klase R ir īsta klase. Tiešām, pieņemot, ka tā ir kopa, iegūstam pretrunas.

$R = \{x \mid x \notin x\}$ – tā ir klase.

Ja R būtu kopa, un $R \in R$, tad R nevar piederēt R, jo

$R = \{x \mid x \notin x\}$, tātad $R \notin R$, pretruna.

Ja R būtu kopa, un $R \notin R$, tad R pieder R, jo $R = \{x \mid x \notin x\}$, tātad $R \in R$, pretruna.

Teorijas ZFC aksiomu galvenā daļa ir:

Aptveršanas aksiomu shēmas akceptētās instances

1) Atdalīšanas (*separation*) aksiomu shēma: ja A ir klase un b – kopa, tad šķēlums $A \cap b$ ir kopa.

Sk. grāmatas sadaļu 2.3, kā to uzrakstīt kopu teorijas valodā.

Sekas:

a) Ja x, y ir **kopas**, tad šķēlums $x \cap y$ un starpība $x - y = \{z \mid z \in x \wedge z \notin y\}$ arī ir kopas.

b) Ja $A \subseteq B$ un A ir **īsta klase**, tad arī B ir īsta klase.

[Jo $B = A \cap B$.]

c) Visu kopu klase $V = \{x \mid x = x\}$ ir īsta klase. [Jo $R \subseteq V$.]

Fīlings: diemžēl, tā kā atdalīšanas aksiomas no lielākas kopas veido mazāku, tad ar tām var uzbūvēt *tikai tukšo kopu:*

$$\exists y \forall x \neg (x \in y) .$$

2) Pāru aksioma: ja x, y ir kopas, tad arī klase $\{x, y\} = \{z \mid z = x \vee z = y\}$ ir kopa.

Sakārtoti pāri: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Sk. grāmatas sadaļu 2.3.

Tagad var ievest Dekarta reizinājumus:

$$x \times y = \{(u, v) \mid u \in x \wedge v \in y\}$$

Fīlings: ar pāriem un atdalīšanu varam būvēt tikai 0, 1 un 2 elementu kopas.

3) Apvienojumu (*union*) aksioma: ja x ir kopa, tas arī klase $Ux = \{z \mid \exists y (z \in y \wedge y \in x)\}$ ir kopa.

Speciālgadījums: $U\{x,y\}=x\cup y$ ir kopa, ja x, y ir kopas.

Google attēli: *axiom of choice*

Sekas:

a) Ja A ir īsta klase un b – kopa, tad starpība $A-b$ ir kopa.

[Jo $(A-b)\cup b=A$.]

b) 3 elementu klase $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ ir kopa.

c) Jebkura galīga kombinācija no tukšās kopas simbola, {} un komatiem ir kopa.

Fīlings: tagad varam būvēt patvaļīgi lielas **galīgas kopas.** Un **bezgalīgas kopas**? Vai pratīsim uzbūvēt kaut vai **bezgalīgas klases**?

Naturālie skaitļi kopu teorijā

$0=\emptyset, 1=\{0\}, 2=\{0,1\}, 3=\{0,1,2\}, \ldots, n+1=n\cup\{n\}, \ldots$

Šīs kopas reprezentē **naturālos skaitļus** kopu teorijā (tur ir tikai kopas!).

Vai šīs kopas veido klasi? T.i. vai varam uzrakstīt formulu

N(x) – "x ir naturāls skaitlis"?

Uzreiz nāk prātā bezgalīga "formula":

$$x=0\lor x=1\lor\ldots\lor x=n\lor\ldots\ ,$$

bet tādas te neder! [Kāpēc: pamēģiniet vispārīgā veidā *nodefinēt*, ko nozīmē "bezgalīga formula"...]

Bet galīgu formulu N(x) tomēr var uzrakstīt, tā iznāk diezgan sarežģīta un tā uzdod **bezgalīgu klasi** N.

Sk. grāmatas sadaļā 2.3, kur parādīts, kā to 1925.gadā eleganti izdarīja John von Neumann.

Izrādās, ka **elementārās aritmētikas** visu teorēmu (naturālo skaitļu īpašību) pierādīšanai pietiek ar pirmajām 3 aptveršanas aksiomām: atdalīšanas, pāru un apvienojumu.

Piemērs – matemātiskā indukcija:

$$F(\emptyset)\land\forall y(N(y)\to(F(y)\to F(y\cup\{y\})))\to\forall x(N(x)\to F(x))$$

4) Bezgalības aksioma: naturālo skaitļu klase ir kopa.
$\exists\omega(\omega=N)$, jeb $\exists\omega\forall x(x\in\omega\Leftrightarrow N(x))$.

Fīlings: tagad varam pierādīt daudzu **sanumurējamu** bezgalīgu **kopu** eksistenci, bet ne ne-sanumurējamu kopu eksistenci. Mēs varētu nodefinēt reālo skaitļu klasi – tā būtu izomorfa ar $P(\omega)$, bet nevarētu pierādīt, ka tā ir kopa.

Tāpēc ir vajadzīga vēl:

5) Pakāpes (*power-set*) aksioma: ja x ir kopa, tad arī klase $P(x)=\{y|y\subseteq x\}$ ir kopa.

Fīlings: tagad varam pierādīt **Kantora teorēmu** un tātad – **nesanumurējamu** kopu eksistenci. Un varam uzbūvēt reālo skaitļu **kopu** (jo tagad $P(\omega)$ ir kopa).

6) Aizvietošanas (*replacement*) aksiomu shēma – Frenkela ieguldījums. Sk. grāmatā.

7) Izvēles (*choice*) aksioma:

$$(\forall y(y\in x\rightarrow y\neq\emptyset))\rightarrow$$
$$\exists f(f-funkcija\wedge\forall y(y\in x\rightarrow f(y)\in y))\ .$$

Google attēli: *axiom of choice*

Tā **nav** aptveršanas aksiomu shēmas instance. Tā liekas esam nekaitīga, bet tās sekas ir ekstrēmi nekonstruktīvas un dīvainas.

Sk. Google attēlos: *sizeless sets,* divas lodes.

Esam ieguvuši **aksiomātisko kopu teoriju ZFC**. Tajā var uzbūvēt visas matemātiskās struktūras un izvest visas zināmās matemātikas teorēmas.

Pagājušajos 100+ gados pretrunas teorijā ZFC nav konstatētas.

Tādā veidā kārtējā krīze matemātikā atkal tika pārvarēta. Bet, ka nākotnē pretrunas neparādīsies, to garantēt nevaram – ja atceramies par:

a) matemātikas vēsturi: trīs pamatu krīzes nebūt nebija dalībnieku muļķības rezultāts!

b) Gēdela otro teorēmu par nepilnību. Tas jau ir nopietnāk – sk. grāmatas sadaļu 5.4. Absolūtas garantijas, ka mūsu teorijā pretrunas neatradīsies nekad, nav iespējamas!

Kontinuuma hipotēzes liktenis

Palasiet grāmatas sadaļu 2.4.1.

Kontinuuma problēma. Vai eksistē bezgalīgas punktu kopas X, tādas, ka $|N|<|X|<|R|$?

Kantora un viņa sekotāji centās pierādīt, ka tādas kopas neeksistē, bet viņiem tas tā arī neizdevās. Tagad zinām, ka šī neveiksme *nebija saistīta ar viņu nepietiekamo matemātisko izveicību*!

Pēc tam, kad kopu teorija tika kvalitatīvi formalizēta, kļuva iespējams iegūt **matemātiskus pierādījumus, "ka tajā kaut ko nevar pierādīt"**, t.i. nevar izvest no precīzi noformulētajām ZFC aksiomām.

Zemāk, *Con* nozīmē *consistency*, bezpretrunību, AC – *Axiom of Choice*, izvēles aksioma, CH – *Continuum Hypothesis*

Pirmais sasniegums: Kurts Gēdels 1938.gadā pierādīja, ka **CH nevar apgāzt**. Precīzāk:

$$Con(ZF) \rightarrow Con(ZF + AC + CH) .$$

Tas nozīmē, ka ja AC kopā ar CH novestu pie pretrunām, tad pie pretrunām novestu arī ZF aksiomas.

Gēdela metode: viņš nodefinēja operāciju komplektu kopu konstruēšanai un ar to – **konstruējamo kopu klasi L**. Un (teorijā ZF) pierādīja, ka klases L kopām izpildās kā ZF aksiomas, tā arī AC un CH. "Pie viena" ar to Gēdels bija pierādījis, ka arī dažu apšaubītā AC nevar novest pie pretrunām.

Galīgais atrisinājums: Pols Koens 1963.gadā **pierādīja**, ka **CH nevar pierādīt**:

$$Con(ZF) \rightarrow Con(ZF + AC + \neg CH) .$$

Izrādās, ka ja vēlaties, varat, neradot pretrunas, pat pieņemt, ka starp sanumurējamo kopu apjomu un nogriežņa punktu kopas apjomu eksistē tieši 17 dažādi bezgalīgu kopu apjomi:

$$|N| < |X_1| < |X_2| < \ldots < |X_{17}| < |R| \quad .$$

Pretrunas tas neradīs. Tas nozīmē, ka kopu teorijas aksiomas par kontinuuma problēmu neko daudz pateikt nespēj! Sīkāk – sk. grāmatas sadaļu 2.4.

Uz personīgo lapu