Uz personīgo lapu

Ptolemaja epicikli, Furjē rindas un neironu tīkli

Lekcija kursā “Matemātikas pamatjēdzieni”

Kārlis Podnieks, LU

Paldies kolēģiem

prof. Guntim Bārzdiņam, prof. Jānim Bičevskim un
prof. Ģirtam Karnītim par iedvesmojošiem komentāriem (2016)

Apolonijs no Pergas (~262 - ~190 BC)

Hiparhs (~190- ~120 BC)

Klaudijs Ptolemajs (~100 - ~170 AD)

Vai tiešām šie grieķu matemātiķi bija izgudrojuši Furjē rindas 2000 gadu pirms Furjē?

[Dažreiz ir grūti to iztēloties, bet cilvēki ne vienmēr ir domājuši tā kā domājam mēs. Vai Zeme riņko ap Sauli? Cilvēki ne vienmēr tā ir domājuši. Un, precīzi runājot, tā nemaz nav taisnība! Saule un planētas riņķo ap kopīgo masu centru, kas palaikam iziet ārpus Saules virsmas, sk. grafiku pa gadiem Vikipēdijā (noteikti apskatiet!). Bet senie grieķi, Koperniks un Keplers to nevarēja zināt.]

Senajos laikos uzskatīja, ka Saule un planētas riņķo ap Zemi. Tā taču izskatās...

Saule lielas problēmas neradīja – tās kustība debesīs diezgan precīzi atbilst apļveida kustībai ap Zemi (bet ne gluži ap Zemes centru, sk. tālāk).

Bet planētas debesīs met cilpas (attiecībā pret zvaigznēm)...

[Cilpas var ieraudzīt, ja piemēram, reizi mēnesī atzīmē *planētas stāvokli attiecībā pret zvaigznēm*. Līdz tam gan ne katrs cilvēks aizdomāsies...]

Sk. animāciju Retrograde motion by Igor Glozman.

Plašāka info: Mars retrograde happens every two years (NASA).
Apskatīt visu gadu bildes.

Būtiski: ja zvaigznes varēja iedomāties esam piestiprinātas “kristāla sfērai”, kas rotē ap Zemi, tad planētas, acīmredzot, kustas šīs sfēras iekšienē.

Un kādai “reālai” kustībai ap Zemi šāda redzamā cilpveida kustība varētu atbilst (pieņemot, ka “viss” tiešām riņko ap Zemi)?

Kam un kāpēc to kādam vajadzēja uzzināt? Nekāda ekonomiska labuma no planētu kustības pētīšanas nevarēja būt (un nav vēl tagad). Tā bija tīri intelektuāla interese: uzminēt “reālo mehānismu” un tā iegūt iespēju paredzēt uz priekšu planētu kustību pie debesīm.

Grieķus iedvesmoja estētiska ideja: pasaules pamatā ir jābūt ideāli perfektām lietām. Zvaigžņu un planētu kustības gadījumā tā būtu kustība pa apli. Tā viņiem radās epiciklu ideja.

Apolonijs pirmais piedāvāja ideju (mēs teiktu, piedāvāja modeli), ka katra planēta kustas ap Zemi pa apli tikai “pa lielam”: īstenībā pa šo apli (**deferentu**) kustas vēl viena apļa (**epicikla**) centrs. Un pa šo epiciklu kustas pati planēta:

Sk. animāciju https://www.youtube.com/watch?v=KT3PmGVf6DU (by Tad Thurston)

Sk. Google attēli: *Deferent and epicycle*

Būtiski: epiciklu mēs no Zemes redzam nevis pretskatā kā apli, bet gan sānskatā, t.i. vispār to neredzam.

Principā šo ideju var attīstīt tālāk: pa pirmo epiciklu kustas vēl viena apļa (**otrā epicikla**) centrs utt. Un tikai pa kādu *n*-to epiciklu kustas pati planēta.

Sk. arī animāciju Vikipēdijā, Furjē rindas, nodaļā Convergence.

Tiesa, Ptolemajs (un Hiparhs vēl pirms viņa) izvēlējās citu ceļu precīzāka modeļa izveidei. Visticamāk, viņa laika skaitlisko aprēķinu tehnika neļāva tikt galā ar modeli, kurā ir vairāku līmeņu epicikli. Otro epiciklu viņš izmantoja tikai Merkura kustības modelēšanai.

Sk. fizikas profesora nopietnu analīzi:

Richard Fitzpatrick. A Modern Almagest. An Updated Version of Ptolemy's Model of the Solar System, 2010.

Otrā epicikla ieviešanas vietā Ptolemajs atļāvās pārvietot lielo apļu (deferentu) centrus prom no Zemes centra.

Sk. Google attēli: *Deferent and epicycle (Ptolemaic Epicycle Machine)*

Modeļa precizitātes tālākai uzlabošanai Ptolemajs ieviesa diezgan dīvainu konstrukciju – t.s. **ekvantus** (*equant*): deferenta rotācijai ir jābūt vienmērīgai nevis skatoties no deferenta centra, bet skatoties no cita punkta – ekvanta. Bez šīs korekcijas modelis sanāk ļoti neprecīzs.

Planētas rotācija pa epiciklu, protams, bija paredzēta vienmērīga.

Šīs papildus brīvības pakāpes ļāva sasniegt tam laikam izcilu planētu redzamās kustības imitācijas precizitāti, saglabājot pieņemamus aprēķinu apjomus ar mazu epiciklu skaitu:

Saulei – 0 epiciklu,

Merkuram – 2 epicikli (par vienu no tiem rotēja deferenta centrs), sk. Google attēli: *Final Ptolemaic model for Mercury*

Venērai, Marsam, Jupiteram, Saturnam – pa 1 epiciklam.

Kopā 5 deferenti un 6 epicikli.

Šī Ptolemaja metode bez jebkādām modifikācijām tika izmantota vēl 13.gs., sastādot t.s. Alfonsine tables planētu stāvokļu prognozēšanai. Šīs tabulas tika izmantotas pat vēl Kopernika un Keplera laikā.

Tam, ka Ptolemaja viena epicikla sistēma izrādījās ļoti sekmīga, ir nopietns pamats. Šodien mēs zinām, ka Zeme un planētas **samērā precīzi** kustas ap Sauli pa elipsēm, kuru vienā fokusā ir Saule. Ptolemaja laika precizitātes līmenī šīs elipses varēja aizstāt ar apļiem, nobīdot to centrus elipšu fokusos. Un tad iznāk, ka "īstenībā" (mums, ne Ptolemajam) katras planētas kustību pret zvaigznēm nosaka divi nobīdīti apļi – planētas orbīta ap Sauli un Zemes orbīta ap Sauli. **Bet, ja par skata punktu izvēlas Zemi, tad šie divi apļi kļūst par deferentu un epiciklu!** Un tāpēc (Ptolemaja laika precizitātes līmenī) vairāk epiciklu labam modelim nevajadzēja! Izņēmums bija tikai Merkurs – tā kustības imitēšanai bija jāpievieno otrs epicikls (savukārt, Saulei pietiek ar deferentu vienu pašu).

Tādā veidā, pielāgojot deferentu un epiciklu rādiusus, centru nobīdes un rotācijas ātrumus, Ptolemajam izdevās savā modelī diezgan precīzi imitēt planētu redzamo kustību debesīs.

Ptolemaja modelis jau no paša sākuma tika kritizēts: tas neesot planētu "īstās" kustības attēlojumu, bet tikai kinemātiska shēma, kas imitē planētu redzamo kustību pret zvaigznēm. Bez "filozofiskā defekta", redzamākais Ptolemaja modeļa defekts bija: tā **nepareizi attēlo planētu spožuma izmaiņas gada laikā**, jo reālie planētu attālumi no Zemes mainās savādāk nekā attēlo Ptolemaja modelis. Jo Ptolemaja modelī planētas attālumu no Zemes nosaka tikai tās rotācijas pozīcija epiciklā (kas no Zemes ir redzams sānskatā), bet īstenībā Zeme un planēta kustas ap Sauli katra pa savu elipsi.

Salīdzinām:

Google attēli: *ptolemy geocentric model*

Google attēli solar system planetary orbits

Filozofiski nepieņemami savulaik likās arī tas, ka katras planētas deferentam bija savs centrs, t.i. "Ptolemaja Visumam" nebija īsta vienota centra! Briesmīgi?

Varat palasīt par šīs problēma reālo (ne tik vienkāršo) vēsturi Vikipēdijā: https://en.wikipedia.org/wiki/Deferent_and_epicycle.

Nicolaus Copernicus (1473-1543)

16.gs. sākumā Koperniks saprata, ka **deferentu nobīdes var aizstāt ar otrā līmeņa epicikliem**, tādā veidā novēršot Ptolemaja sistēmas "filozofisko defektu". Viņa laikā skaitļošanas iespējas bija lielākas (arābu cipari!), tāpēc orā līmeņa epiciklus jau varēja atļauties izmēģināt.

Kopernika laikā astronomisko novērojumu precizitāte bija labāka nekā Ptolemaja laikos. Un viņš konstatēja, ka Marss no Ptolemaja prognozēm gada laikā novirzās par 2 grādiem, bet Saturns – par 1,5 grādiem. Un viņš saprata, ka modelī šīs novirzes var kompensēt, ieviešot papildus epiciklu līmeņus. Un viņš saprata arī, ka atšķirībā no deferentu centru nobīdes idejas, **epiciklu mehānisms ir universāls –** ar to var uzmodelēt jebkādu debesīs redzamo kustību (sk. tālāk).

16.gs. lielāko skaitļošanas iespēju dēļ Koperniks varēja atļauties izskaitļot, kādas sekas varētu būt **heliocentriskajai idejai** – liekot Zemei riņķot ap Sauli līdzās citam planētām. Izmantojot tos pašus "perfektos" apļveida deferentus un epiciklus, izrādījās, ka **jaunajā modelī pirmā līmeņa epicikli sanāk izmēros daudz**

mazāki nekā Ptolemajam.

Sk. Google attēli *The Copernican System of the World*

Jo Kopernika pirmā līmeņa epicikliem vajadzēja kompensēt tikai planētu eliptisko orbītu ekscentricitātes (“izstiepumu”), kamēr Ptolemaja epicikli kompensēja arī neizdevīgo skata punktu (no Zemes). Tieši te izpaudās heliocentriskās idejas pārākums pār ģeocentrisko ideju (**nevis epiciklu skaitā, bet to izmēros**, sk. tālāk).

Otra priekšrocība – Kopernika shēma ļāva daudz precīzāk imitēt **planētu spožuma maiņas**: jo tagad Zeme un planētas riņķoja ap Sauli, tāpēc modelī planētu attālumi līdz Zemei mainījās jau vairāk atbilstoši reālajai situācijai.

Sk. Google attēli: *ptolemy geocentric model*

Sk. Google attēli The Copernican System of the World

Bet Kopernika laikā sasniegtās novērojumu precizitātes līmenī ar vienu epiciklu līmeni vairs nepietika. Viņa modeļa pirmajā versijā (1514.gads) bija 34 deferenti un epicikli, galīgajā versijā (1543.gads) – vēl vairāk.

Nepatiesa leģenda. Cik deferentu un epiciklu (*ja neizmanto deferentu nobīdes*) ir vajadzīgs, lai planētu redzamo kustību (augstā precizitātes līmenī) attēlotu Ptolemaja un Kopernika modeļos? Abos modeļos to vajag daudz. Bet kurš modelis labāks – ģeocentriskais vai heliocentriskais, kurā epiciklu būs mazāk? Ir radusies nepatiesa leģenda, ka Kopernika modelī vajadzīgais epiciklu skaits ir daudz mazāks un ka tieši šis faktors pamato heliocentriskā modeļa pārākumu. Cik noprotu, Kopernika paša epiciklus precīzi saskaitīt neviens neprot, un attiecīgos precīzos dator-eksperimentus, kas to varētu noskaidrot, arī neviens nav gribējis uzņemties.

Bet viss šis “epiciklu pasākums” varēja būt sekmīgs tikai pateicoties matemātiskai teorēmai, ko Koperniks teorētiski nezināja, bet būtībā – praktiski izmantoja to:

“Universalitātes teorēma N1”. Jebkuru redzamo kustību debesīs var pēc patikas precīzi imitēt ar deferentiem un iekļautiem epicikliem pietiekamā skaitā.

“**Pierādījums**”. Ptolemaja epicikli spēj uzzīmēt debesīs pat **cilvēka portretu**, sk. Ptolemy and Homer (Simpson) by Christián Carman and Ramiro Serra (paldies Renāram Liepiņam par norādi). Pievērsiet uzmanību deferentam.

Šo teorēmu (jau daudz vispārīgākā veidā) 19.gadsimta sākumā pierādīja **Furjē** (sk. tālāk).

Kāda ar epicikliem sanāk “debesu matemātika”?

Ja planēta kustētos ap Zemes centru precīzi pa apli (deferentu), tad kustības plaknē planētas pozīcijas projekcijas uz horizontālo un vertikālo asi attiecīgi būtu:

Sk. Google attēli: *sinus cosinus*

$$R_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_0}+\phi_0\right) \text{ (horizontālā projekcija);}$$

$$R_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_0}+\phi_0\right) \text{ (vertikālā projekcija),}$$

kur R_0 ir apļa rādiuss, P_0 – viena apgrieziena laiks (periods), φ_0 – fāzes nobīde (sākuma pozīcija pie $t=0$) un t – laiks. [cos t periods ir 2π, cos 2πt periods ir 1, bet cos 2πt/P periods ir P]

Ja planēta kustētos precīzi pa pirmo epiciklu (kurš pats kustas pa deferenta apli), tad kustības projekcijas uz asīm būtu:

Sk. Furjē rindas Vikipēdijā.

$$R_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_0}+\phi_0\right)+R_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_1}+\phi_1\right) \;;$$

$$R_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_0}+\phi_0\right)+R_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_1}+\phi_1\right) \;,$$

kur R_i ir abu apļu rādiusi, P_i – apgriezienu periodi, φ_i – fāžu nobīdes un t – laiks.

Utt., ja epiciklu skaits ir lielāks, tad projekcijas ir:

$$R_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_0}+\phi_0\right)+R_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_1}+\phi_1\right)+R_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_2}+\phi_2\right)+\ldots \;;$$

$$R_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_0}+\phi_0\right)+R_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_1}+\phi_1\right)+R_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_2}+\phi_2\right)+\ldots \quad .$$

Redzam, ka (vispārinot) "epiciklu fenomens" īstenībā atbilst iespējai **"katru" periodisku funkciju *f(t)* pēc patikas precīzi attēlot kā summu:**

$$f(t)\approx\sum_{n=0}^{N} R_n \sin\left(\frac{2\pi t}{P_n}+\phi_n\right)$$

(pielāgojot fāžu nobīdes, sinusu vietā varam izmantot kosinusus).

Ja esat kādreiz redzējuši **Furjē rindu** formulas, tad šī formula Jums tās noteikti atgādina... Sk. tālāk.

Un starp citu, **šajā** formulā jau ir iekodēts arī ... **neironu tīkls!** Sk. tālāk.

Diemžēl, secinājums, ka Ptolemaja epiciklu pamatā ir tas pats fenomens, kas Furjē rindu pamatā, izrādās, **nav mans**:

"The interpretation that the Fourier transform (and (9)) has in terms of deferent and epicyclical motions has been noted by many; the more ancient that I could retrieve is in a memory of **1874** of G. Schiaparelli, reprinted in [28]."

Sk. Giovanni Gallavotti. Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov, *Rend. Mat. Acc. Lincei*, s. 9, v. 12:125-152 (2001)

Giovanni Schiaparelli (1835-1910), itāļu astronoms, Marsa pētnieks (1877.gads – Marsa "kanāli").

Mūzikas matemātika

Jau Pitagora laikā mūzikas skaņas analizēja, salīdzinot dažāda garuma stīgu skanējumu, konstatēja, ka labi kopā skan stīga ar pusstīgu, trešdaļstīgu utt. Mūslaiku terminos tas skan šādi: skaņa ar frekvenci ω (pamattoni) labi skan kopā ar skaņu frekvencēm $2\omega, 3\omega, \ldots$. Tās ir pieņemts saukt par pamattoņa *harmonikām*.

Šādu skaņu summēšanos apraksta formula:

$$a(t)=\sum_{n=1}^{N} c_n \sin(2\pi\omega \boldsymbol{n} t) \quad .$$

Šeit ω ir pamattoņa frekvence, t – laiks, *a(t)* – skaņas viļņa amplitūda.

Šī formula vēl vairāk atgādina Furjē rindas...

Vairāk sk. Harmonic Vikipēdijā.

Žozefs Furjē (1768-1830)

Sk arī Furjē rindas Vikipēdijā.

Furjē 1807.gadā atrisināja t.s. siltuma vadīšanas vienādojuma vispārīgo gadījumu.

Vienas dimensijas (t.i. tieva stieņa) gadījumā šis uzdevums izskatās šādi:

Attēls Vikipēdijā

1) Mūs interesē, kā mainīsies temperatūru sadalījums, laikam t ejot uz priekšu, t.i. **funkcija** $u(x,t)$ – stieņa temperatūra punktā *x* laika momentā *t (temperatūras* grafiks*")*

2) Ir dots **sākuma nosacījums** – stieņa punktu temperatūras pie *t=0 un* $0 \leq x \leq L$ (*L* ir stieņa garums) – funkcija:

$$u(x,0)=u_o(x) \ .$$

3) Doti arī **robežnosacījumi** – stieņa gali ir izolēti, tur siltuma plūsmas nav (grafika līknes galos pieskares ir horizontālas):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0;\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0 \ .$$

4) Kas notiks tālāk – laikam *t* ejot uz priekšu? Siltuma izplatīšanās procesu apraksta vienādojums (α – pozitīva konstante):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \ .$$

Otrais atvasinājums $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$ ir $u(x,t)$ grafika līknes *liekums* stieņa punktā x laika momentā t. Jo lielāks izliekums, jo straujāk mainās temperatūra.

5) No visiem šiem nosacījumiem ir jāatrod funkcija $u(x,t)$.

Furjē ideja, kas uzdevumu atrisina pilnīgi vispārīgā veidā: meklēsim atrisinājumu kā sinusoīdu summu:

$$u(x,t)=a_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(b_n x+c_n) .$$

Šeit b_n, c_n ir iecerētas kā konstantes, bet amplitūdas $a_n(t)$ – kā laikā mainīgas.

No vienādojuma un nosacījumiem tad seko [pamēģiniet izsecināt paši], ka:

$$a_0(t)=d_0; a_n(t)=d_n e^{-\frac{\alpha\pi k_n^2}{L^2}t}; b_n=\frac{\pi k_n}{L}; c_n=\frac{\pi}{2} ,$$

$$u(x,t)=d_0+\sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\frac{\alpha\pi k_n^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{\pi k_n x}{L}+\frac{\pi}{2}\right) ,$$

kur d_n, k_n ir konstantes, pie tam k_n ir veseli skaitļi.

Furjē likās, ka nekas slikts nenotiks, ja paņemsim $k_n=n$. Sākuma nosacījums pie *t=0* tad izskatās šādi:

$$u(x,0)=d_0+\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}+\frac{\pi}{2}\right)=u_0(x) \text{ , (0)}$$

kur $u_0(x)$ ir dota "patvaļīga" funkcija segmentā *[0, L]* (stieņa temperatūras grafiks pie *t=0*). Tieši no šīs vienādības būtu jārodas konstantēm d_n .

Šeit esam atkal nonākuši pie tās pašas epiciklu universialitātes problēmas:

Problēma. Vai Furjē izvēlētā metode tiešām ir universāla? T.i. vai summas (0) koeficientus $d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots$ vienmēr varēsim piemeklēt tā, lai tādas sinusu rindas summā sanāktu **jebkura** dotā sākuma nosacījuma funkcija $u_0(x)$?

Furjē 1807.gadā parādīja, ka to varēsim, tātad viņš tiešām bija atrisinājis siltuma vadīšanas vienādojuma vispārīgo gadījumu: lai to izdarītu, vajag tikai iemācīties doto funkciju $u_0(x)$ "izvirzīt" rindā (0) – **Furjē rindā**.

[Furjē pierādījums nevarēja būt pilnīgi korekts mūsdienu izpratnē, jo tolaik vēl nebija izgudrota precīza funkcijas jēdziena definīcija. Tikai vēlāk, kad tika ieviestas precīzas funkcijas un nepārtrauktības jēdzienu definīcijas, citi matemātiķi viņa pierādījumu padarīja matemātiski korektu mūsdienu izpratnē. Īstenībā precīzu definīciju trūkums funkcijām, nepārtrauktībai, rindu konverģencei un bezgalīgi mazo lielumu rēķiniem 18.gs. beigās noveda pie **otrās krīzes** matemātikas pamatos (kopu teorijas krīze tātad bija **trešā**!).

Furjē rindas

"Atkabināsim" tagad savas sinusu rindu summas no siltuma vadīšanas vienādojuma, un jautāsim vispārīgāk:

Vai **katru** "pieklājīgu" reālo skaitļu funkciju *f(x) kādā* segmentā $[x_0, x_0+P]$ var attēlot kā sinusu summu:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{P}+d_n\right)\right) \text{ , (1)}$$

kur a_0, c_n un d_n ir konstantes?

Kas te var sanākt? Sk. **Furjē rindas** Vikipēdijā. (Uzklikšķiniet labajā pusē un apskatiet animāciju.)

"Pamattonis" šeit ir pirmā sinusoīda $c_1\sin\left(\frac{2\pi x}{P}+d_1\right)$. Tās periods ir P [jo $\sin x$ periods ir 2π , $\sin 2\pi x$ periods ir 1, bet

$\sin\frac{2\pi x}{P}$ periods ir P].

Tālākie saskaitāmie ir “pamattoņa” otrās, trešās utt. harmonikas. Vai katru “pieklājīgu” funkciju var attēlot kā harmoniku rindas summu?

Izmantojot identitāti $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$, iegūstam pierastāku Furjē rindas pieraksta formu:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{P}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{P}\right)\text{ , (2)}$$

kur $a_n=c_n\sin d_n ; b_n=c_n\cos d_n$.

[No pieraksta formas (2) var iegūt atpakaļ formu (1): $c^2=a^2+b^2 ; d=\arccos\frac{b}{c}$.]

Kā dotai funkcijai *f* atrast vajadzīgās koeficientu a_n, b_n vērtības?

Ja pareizināsim vienādības (2) abas puses ar $\cos\frac{2\pi nx}{P}$ vai $\sin\frac{2\pi nx}{P}$ un integrēsim segmentā $[x_0, x_0+P]$, tad visi saskaitāmie, izņemot vienu, kļūst vienādi ar nulli, un tā mēs iegūsim, ka

$$\int_{x_0}^{x_0+P} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{P}\,dx=\frac{1}{2}P a_n \ ;$$

$$\int_{x_0}^{x_0+P} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{P}\,dx=\frac{1}{2}P b_n \ .$$

Tātad koeficientus a_n, b_n viennozīmīgi nosaka pati funkcija *f* , un mēs varam izteiksmi (2) saukt par **funkcijas *f* Furjē rindu** segmentā $[x_0, x_0+P]$. T.i. katrai integrējamai funkcijai var uzbūvēt tai atbilstošo Furjē rindu.

Un tad varam jautāt: **kurām funkcijām *f* viņu Furjē rindas tiešām konverģē uz pašu funkciju?** [Tas nav acīm redzami garantēts, sk. tālāk.]

[Nepārejot uz sin+cos, Furjē rindu koeficientu formulas nesanāk tik vienkāršas un skaistas.]

Minimālais nosacījums – *f* ir jābūt *integrējamai* segmentā $[x_0, x_0+P]$ (lai mēs vispār varētu aprēķināt koeficientus a_n, b_n). Bet tik vienkārši tomēr nesanāk: eksistē *nepārtrauktas* funkcijas *f*, kam Furjē rinda konverģē uz *f(x)* **ne katram *x***. Tāpēc Furjē rindu konverģences nosacījumu analīze nav nemaz tik vienkārša.

Viens no iespējamiem pietiekamajiem nosacījumiem, kam konverģenci tiešām var pierādīt:

Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Universalitātes teorēma N2 (Dirihlē nosacījumi "pieklājīgai" funkcijai *f*).

Ja funkcijai *f* segmentā $[x_0, x_0+P]$:

a) integrālis $\int_{x_0}^{x_o+P} |f(x)|dx$ ir galīgs;

b) eksistē tikai galīgs skaits *minimumu un maksimumu*;

c) eksistē tikai galīgs skaits *pārtraukuma punktu*, un visi šie pārtraukumi ir galīgi, [Sk. Google attēli: *discontinuous*]

tad tās Furjē rinda (2) konverģē:

a) uz $f(x)$ – tiem *x* šajā segmentā, kuros *f* ir *nepārtraukta;*

b) uz $\frac{f(x^{-})+f(x^{+})}{2}$ (kreisās un labējās robežas vidējais) , ja *x* ir pārtraukuma punkts.

Dirihlē nosacījumi izpildās **diferencējamām funkcijām**. Tie izpildās arī **zāģveida funkcijām** (slīpām un perpendikulārām).

Sk. Google attēli: *saw like functions*

Tāds ir Furjē rindu problēmas atrisinājums: jebkuru kāda segmentā "pieklājīgu" funkciju f var izvirzīt bezgalīgā Furjē rindā, kas uz šo funkciju konverģē.

[Atceramies arī Georgu Kantoru 1872.gadā – pētot Furjē rindu konverģenci, viņš nonāca pie vispārīga jēdziena par bezgalīgām kopām. Furjē rindu nozīmīgums neļāva viņam nobīties un atkāpties, kā to savulaik izdarīja Galilejs, kurš risināja tikai "izklaidējošu" uzdevumu.]

Sk. arī interesanto t.s. Gibsa fenomenu Vikipēdijā.

Funkciju aproksimācija

Astronomi, inženieri un datoriķi nevar izmantot bezgalīgas rindas, kas precīzi konverģē bezgalībā. Viņi izmanto šo rindu galīgus sākuma gabalus, un vēlas, lai tie pietiekami tuvu **aproksimētu** vajadzīgo funkciju *f*. [Tieši aproksimācijas mums būs jāiegūst, arī būvējot neironu tīklus.]

Furjē rindas labi **aproksimē** jebkuru nepārtrauktu funkciju, ne tikai diferencējamās:

Universalitātes teorēma N2'. Ja funkcija *f* segmentā $[x_0, x_0+P]$ ir *vienmērīgi nepārtraukta*, tad katram $\epsilon>0$ eksistē tāds N un tādi koeficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, ka visiem *x* šajā segmentā:

$$\left|f(x)-a_0-\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{P}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{P}\right)\right|<\epsilon \ .$$

Neironu tīkli (piemērs)

Paldies Renāram Liepiņam par norādi.

http://playground.tensorflow.org/ Noteikti paspēlējieties! Datu izvēlne, *Run/Pause* un *Reset* pogas atrodas augšā pa kreisi.

Tiek risināts **klasifikācijas** uzdevums: plaknē dota zilu un oranžu aplīšu kopa (treniņa kopa). Gribam iemācīt neironu tīklu no dotajām punkta koordinātēm izsecināt, kādas krāsas aplītim šis punkts varētu atbilst. Attēlā mēs redzam apmācības animāciju: kādu krāsu mūsu tīkls katram plaknes punktam šajā brīdī ir piešķīris.

Paspēlējieties ar 4 datu kopām un mainīgu neironu skaitu (redzēsiet, ka ar spirāles kopu veicas visgrūtāk – jāņem 3 vidējie slāņi (8, 4, 2 neironi katrā). To jau sauc par *deep learning*...

Neironu tīkli (teorija)

Sk. manu lekciju **Neironu tīkli**.

Furjē rindas kā neironu tīkli

Google attēli: *neural networks* (vienslāņa un dziļie tīkli)

un *activation function*

Aplūkosim vienkāršāko gadījumu: **viena argumenta funkciju** modelēšanu ar **vienslāņa** neironu tīkliem.

Google attēli: *neural network formulas*

Šajā gadījumā tīkls ievadā saņem vienu skaitli x .

Vidējā slāņa neironu skaits ir N.

Tālāk vidējā slāņa *n*-ais neirons saņem skaitli $a_n x + b_n$, un izdod skaitli $h(a_n x + b_n)$, kur *h(x)* ir neironu aktivācijas funkcija.

Tīkla izejā šie skaitļi tiek samiksēti ar koeficientiem $c_0, c_1, \ldots, c_N$ un tātad tīkls rēķina funkciju:

$$\hat{f}(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n h(a_n x + b_n) \ , \qquad (3)$$

Atcerēsimies Universalitātes teorēmu 2’ Furjē rindām.

No šīs teorēmas var iegūt formu, kurā ir tikai sinusi: jebkuru segmentā $\{x_0, x_0 + P\}$ nepārtrauktu funkciju f var pēc patikas precīzi aproksimēt ar formulu:

$$f(x) \approx c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n \sin(\frac{2\pi nx}{P} + d_n)) \ .$$

Kā redzam, šī formula pilnībā atbilst formulai (3), ja par neironu aktivācijas funkciju paņemam $h(x)=\sin x$ un $a_n=\frac{2\pi n}{P}$.

Tāpēc šī formula ļauj uzbūvēt neironu tīklu ar vienu vidējo slāni no *N* neironiem, kas labi aproksimēs doto funkciju *f*.

0) Tīkla būvēšanu sākam ar Furjē rindas veidošanu funkcijai *f*, t.i. izrēķinām 3N+1 parametrus c_0, c_n, d_n .

1) Ieejā tīklam padodam skaitli *x*.

2) Tad *n*-tais vidējā slāņa neirons saņem ieejā skaitli

$$\frac{2\pi nx}{P}+d_n \ .$$

3) Par neironu aktivācijas funkciju ņemsim $h(x)=\sin x$,

tātad izejā n-tais neirons izdos skaitli $\sin\left(\frac{2\pi nx}{P}+d_n\right)$.

4) Pēc tam tīkla izejā šos sinusus lineāri "miksējam" ar koeficientiem $c_0, c_1, \ldots, c_N$ un iegūto summas skaitli izdodam tīkla izejā.

No universalitātes teorēmas Furjē rindām uzreiz seko, ka šādi sinus-neironu tīkli ir universāls modelēšanas līdzeklis:

Universalitātes teorēma 3 (universālās aproksimācijas teorēma tīkliem ar sinus-neironiem, viena argumenta funkciju gadījums). Atbilstoši izvēloties vidējā slāņa sinus-neironu skaitu un atbilstoši izvēloties tīkla parametru vērtības, jebkurai dotai vienmērīgi nepārtrauktai funkcijai **f** dotajā **segmentā [a, b]** un jebkurai dotai precizitātei var izveidot neironu tīklu **ar vienu vidējo slāni**, kas aproksimēs **f** ar uzdoto precizitāti.

Protams, ka šī speciālā universalitātes teorēma seko no vispārīgās "kīniešu" universalitātes teorēmas par neironu tīkliem, kuru aktivācijas funkcija nav polinoms (un sinuss nav polinoms).

Šo teorēmu var vispārināt arī **vairāku argumentu funkcijām,** izmantojot teorēmu par vairākkārtīgām Furjē rindām (*multiple Fourier series*):

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{m} \in Z^p} c_{\boldsymbol{m}} e^{i \boldsymbol{m} \boldsymbol{x}} \quad ,$$

kur **x** ir vektors *p*-dimensiju telpā, **m** – vektori no *p* veseliem skaitļiem, un summēts tiek pa visiem tādiem **m**.

To visu redzot, varam secināt, ka **(vienslāņa) neironu tīkli ir Furjē rindu vispārinājums, kur *sin* un *cos* funkciju vietā ir atļauts izmantot daudzas citas funkcijas.** Vēsturiski gan neironu tīkli tika izgudroti savādākā kontekstā: kā reālo smadzeņu neironu darbības vienkāršots atdarinājums, un tur jau no paša sākuma figurē daudzi slāņi, nevis viens.