Latvijas Universitāte
Datorikas fakultāte

# Eksperimentālā matemātika

Prof. Kārlis Podnieks

LU un LMT Datorzinātņu dienas
2013.gada 5.augustā

## Goldbaha komēta...

## Goldbaha hipotēze

**14:30**

Christian Goldbach (1690-1764, portrets)

Aplūkojam **pārskaitļus**, sākot ar 4, un mēģinām katru no tiem uzrakstīt kā divu pirmskaitļu summu ( $2n=p_1+p_2$ ):

**4=2+2**, **6=3+3**, 8=5+3, **10=5+5**, 12=7+5, 14=11+3, 16=13+3, 18=13+5, 20=17+3, 22=19+3, 24=19+5, 26=23+3, 28=23+5, **30=23+7**, 32=29+3, 34=31+3, 36=31+5, 38=31+7, 40=37+3, 42=37+5, 44=41+3, 46=43+3, 48=43+5, 50=47+3, 52=47+5, 54=47+7, 56=53+3, 58=53+5, 60=53+7, 62=59+3, 64=61+3, 66=61+5, 68=61+7, 70=67+3, 72=67+5, 74=71+3, 76=73+3, 78=73+5, 80=73+7, 82=79+3, 84=79+5, 86=83+3, 88=83+5, 90=83+5, 92=89+3, 94=89+5, 96=89+7, **98=79+19**, 100=97+3, 102=97+5, 104=97+7, 106=103+3, 108=103+5, 110=107+3, 112=109+3, 114=109+5, 116=113+3, 118=113+5, 120=113+7, **122=109+13**, **124=113+11**, 126=113+13, 128=109+19, 130=127+3, 132=127+5, 134=131+3, ...

Kā redzam, tas vienmēr izdodas, un 1742.gadā Goldbahs to noformulēja kā **hipotēzi** (tagad sakām – **Goldbaha hipotēze,** Goldbach's Conjecture):

### Ikvienu pārskaitli, kas lielāks par 2, var izteikt kā divu pirmskaitļu summu:

$$2n=p_1+p_2 \ .$$

Ir pagājuši 270 gadi, bet šī hipotēze joprojām nav ne pierādīta, ne apgāzta!

## Datoru laikmetā...

Ko šajā problēmā ir mainījusi **datoru laikmeta** atnākšana?

Pirmkārt, **hipotēze ir pārbaudīta** visiem $2n \le 10^{18}$ , un tik tālu ir izrādījusies patiesa.

Otrkārt, mēs varam ļoti daudziem skaitļiem 2n reāli saskaitīt, **cik dažādos veidos** tos var izteikt kā divu pirmskaitļu summas. Apzīmēsim šo veidu skaitu ar $G(2n)$ .

Piemēram, 34=31+3=29+5=23+11=17+17, tātad G(34)=4.

Sk. http://oeis.org/A002375:

G(116) = 6, G(118)=12, 4, 5, 10, 3, 7, 9, 6, 5, 8, 7, 8, 11, 6, 5, 12, 4, 8, 11, 5, 8, 10, 5, 6, 13, 9, ...

Kā izskatīsies šīs "izrobotās" funkcijas grafiks?

Tā būs **Goldbaha komēta**:

2n no 4 līdz 4000: sk. Goldbach's comet

2n no 4 līdz 1 000 000; sk. Goldbach's Conjecture

Sk. vēl interesantas lapas:

Puzzle 82.- The Goldbach's Comet by www.primepuzzles.net

Goldbach Conjecture Research by Mark Herkommer

Fractal in the statistics of Goldbach partition by Wang Liang, Huang Yan, Dai Zhi-cheng

Pirmie šo komētu pamanīja 1989.gadā divi "astronomi" – *Henry F. Fliegel* un *Douglas S. Robertson*:

**Fliegel, Henry F.; Robertson, Douglas S**. Goldbach's Comet: the numbers related to Goldbach's Conjecture. ***Journal of Recreational Mathematics***, v21(1) 1-7, 1989.

Savos "nopietno" publikāciju sarakstos viņi šo rakstu neliek...

Komētas apakšējā mala aptuveni atbilst nevienādībai:

$$G(2n) \ge 0.02745 \cdot (2n)^{0.86} \ .$$

Tātad:

$$G(10^3) > 10 \, ; G(10^4) > 75 \, ; G(10^6) > 3967 \ ,$$

t.i. funkcija G(2n) ne sevišķi ātri, bet konsekventi... tiecas uz bezgalību. Tas liekas vēl lielāks brīnums: G(2n) tiecas uz bezgalību, bet neviens neprot pierādīt pat to, ka visiem n, G(2n)>0! Citiem vārdiem:

Skaitlim *2n* augot, tam parādās arvien vairāk attēlojumu divu pirmskaitļu summā, bet neviens neprot pierādīt, ka katram *2n* eksistē kaut vai viens tāds attēlojums!

Nevienādību $G(2n) \ge 0.02745 \cdot (2n)^{0.86}$ mēs varētu nosaukt par **pastiprināto Goldbaha hipotēzi**. Bet mēs taču neprotam pierādīt pat nepastiprināto hipotēzi!

**14:35**

## Eksperimentālā matemātika

(datoru izmantošana matemātiskos pētījumos)

Sk. *Experimental mathematics* – te ir EM iespaidīgāko sasniegumu saraksts.

1) Jau zināmo matemātisko hipotēžu pārbaude arvien lielākos apjomos (piemēram, Goldbaha un Rīmana hipotēzes).

2) Novērojumi jaunu hipotēžu izvirzīšanai (piemēram, skaitļu rindu summēšanas formulu atklāšana).

3) Teorēmu pierādīšana, izmantojot liela apjoma pārlases (piemēram, četru krāsu teorēma)

Interesantas problēmas: Collatz conjecture, Lorenz attractor

**14:40**

## $2^n$ ciparu summa trijnieku pierakstā

$2^0 = 1_3$; CS($2^0$, 3)=1;

$2^1 = 2_3$; CS($2^1$, 3)=2;

$2^2 = 11_3$; CS($2^2$, 3)=2;

$2^3 = 22_3$; CS($2^3$, 3)=4;

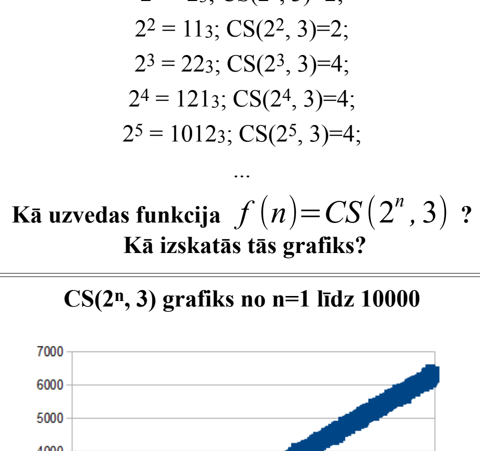
$2^4 = 121_3$; CS($2^4$, 3)=4;

$2^5 = 1012_3$; CS($2^5$, 3)=4;

...

**Kā uzvedas funkcija** $f(n)=CS(2^n,3)$ **?**
**Kā izskatās tās grafiks?**

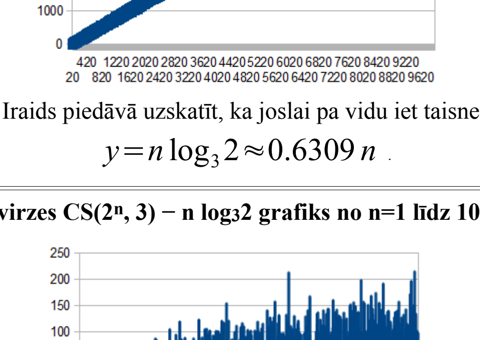
### CS($2^n$, 3) grafiks no n=1 līdz 10000




Jānis Iraids piedāvā uzskatīt, ka joslai pa vidu iet taisne

$$y=n\log_3 2 \approx 0.6309\, n \ .$$

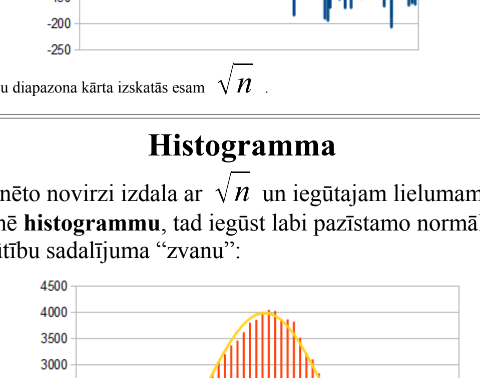
### Novirzes CS($2^n$, 3) − n $\log_3 2$ grafiks no n=1 līdz 10000




Svārstību diapazona kārta izskatās esam $\sqrt{n}$ .

## Histogramma

Ja minēto novirzi izdala ar $\sqrt{n}$ un iegūtajam lielumam uzzīmē **histogrammu**, tad iegūst labi pazīstamo normālā varbūtību sadalījuma "zvanu":




Īstenībā šis konkrētais grafiks ir iegūts no jau lielākiem datiem (n mainās no 1 līdz 100000), pie tam minētā starpība ir izdalīta nevis ar $\sqrt{n}$ , bet ar $\sqrt{n\frac{2}{3}\log_3 2} \approx \sqrt{0.4206\, n}$ , un rezultātā ir **ļoti precīzi** ir iznākusi standarta normālā varbūtību sadalījuma (centrs 0, dispersija 1) $p_{0,1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ histogramma.

## Par ko tas Jums liecina?

Par to, ka skaitļa $2^n$ trijnieku pierakstā k-ais cipars $C(2^n,3,k)$ ir **"neatkarīgs gadījuma lielums"**, kas pieņem vērtības 0, 1, 2 ar vienādām varbūtībām $\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}$ (Jāņa Iraida secinājums). Tātad, $C(2^n,3,k)$

"vidējā vērtība": $0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=1$ ;

"dispersija": $(0-1)^2\cdot\frac{1}{3}+(1-1)^2\cdot\frac{1}{3}+(2-1)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ .

Pavisam skaitļa $2^n$ trijnieku pierakstā ir aptuveni $\log_3 2^n = n\log_3 2$ cipari, tātad ciparu summas

$$CS(2^n,3)=\sum_{k=0}^{n\log_3 2} C(2^n,3,k)$$

"vidējā vērtība" ir $n\log_3 2$ , un "dispersija" $n\frac{2}{3}\log_3 2$ . Un tāpēc, "saskaņā ar centrālo robežteorēmu" arī lielumam

$$\frac{CS(2^n,3)-n\log_3 2}{\sqrt{n\frac{2}{3}\log_3 2}} \ , \qquad (*)$$

ja n ir liels, ir jāuzvedas kā standarta normāli sadalītam gadījuma lielumam. Ko arī novērojam "dabā"...

## Vai to varēs pierādīt?

To, ka $2^n$ cipari trijnieku pierakstā ir "nejauši", protams, pierādīt nevarēs, jo tie NAV nejauši!

Bet, varbūt, kādreiz varēs pierādīt, piemēram, ka

$$CS(2^n,3)=n\log_3 2+O\left(\sqrt{n\log\log n}\right) \ ? \qquad (**)$$

[Labāku O(...) te nepieļauj iterētā logaritma likums.]

Diemžēl, situācija te ir tāda pati kā Goldbaha hipotēzes gadījumā: **pierādīt izdodas daudz daudz mazāk nekā varam konstatēt novērojumos**.

No raksta

**C. L. Stewart**. On the representation of an integer in two different bases. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 319 (1980): 63-72

teorēmas 2 seko, ka kādai konstantei C>0 un visiem n:

$$CS(2^n,3) > \frac{\log n}{\log\log n + C} - 1 \ .$$

Ir pagājuši 33 gadi, un nekas labāks nevienam nav izdevies...

**14:45**

## Kāpēc tā?

Varbūt, (**) vispār nekad neizdosies pierādīt? Varam diskutēt... Arī par skaitļa π decimālā pieraksta ciparu statistiku...

## Naturālā skaitļa N sarežģītība ||N||

Ar šo problēmu mūsu specseminārs "Eksperimentālā matemātika" nodarbojas jau vairākus gadus.

3=1+1+1, ||3||=3;

6=2*3=(1+1)*(1+1+1), ||6||=5;

14=2*7=2*(2*3+1), ||14||=8.

**Definīcija.** ||N|| = vieninieku skaits visīsākajā izteiksmē no 1, +, *, (, ), kuras vērtība ir N. (Sk. arī A005245 Sloane enciklopēdijā)

**Teorēma**. $3\log_3 N \le \|N\| \le 3\log_2 N$ .

$3^3$=27=(1+1+1)*(1+1+1)*(1+1+1).

**Teorēma**. ||$3^k$||=3k, un augšminētais veids ir labākais kā bāzē {1, +, *, (, )} attēlot trijnieka pakāpes!

$2^5$=32=(1+1)*(1+1)*(1+1)*(1+1)*(1+1)

Vai tas ir labākais veids kā bāzē {1, +, *, (, )} attēlot divnieka pakāpes?

**Hipotēze**. Ir. Tātad: ||$2^k$||=2k.

To nevienam vēl nav izdevies pierādīt. Tas ir šī pētījumu virziena lielākais **izaicinājums!**

Hipotēze sekmīgi pārbaudīta visām pakāpēm $2^k < 10^{12}$ jeb k≤39 (J. Iraids).

## Kāpēc šo hipotēzi mums nekad neizdosies pierādīt?

Tāpēc, ka no tās seko "pārāk labs"ciparu summas $CS(2^n,3)$ apakšējais novērtējums!

Tiešām: $2^n$ pieraksts trijnieku sistēmā dod arī šī skaitļa pierakstu bāzē {1, +, *, (, )}, piemēram:

$2^5 = 1012_3$ = (((1)3+0)3+1)3+2.

Vieninieku skaits šajā izteiksmē ir 3 reizes pa 1+1+1 plus ciparu summa CS($2^5$, 3)=1+0+1+2.

$2^n$ gadījumā ciparu skaits ir aptuveni $n\log_3 2$ , tātad $2^n$ pieraksts trijnieku sistēmā dod pierakstu bāzē {1, +, *, (, )} ar aptuveni $3n\log_3 2+CS(2^n,3)$ vieniniekiem.

Un tātad, ja mūsu hipotēze ||$2^n$||=2n ir patiesa, tad:

$$3n\log_3 2+CS(2^n,3) \ge 2n \ ; \text{jeb:}$$

$$CS(2^n,3) \ge 2n-3n\log_3 2 \approx 0{,}1072\, n \ .$$

Šāds apakšējais novērtējums tālu pārsniedz to, kas matemātiķiem ir izdevies. Kas no tā seko?

**14:50**

## ||N|| vērtības visiem N≤$10^{12}$

Izmantojot parastu galda datoru, M. Opmanis savulaik aprēķināja ||N|| līdz N=997 000 000.

2010.gadā, izmantojot stipri jaudīgāku datoru (15 GB atmiņa utt.), J. Iraids aprēķināja visas ||N|| vērtības līdz N=$10^{12}$.

Rēķins ilga 2½ nedēļas. Rezultāti glabājas uz tīmekļa servera kā 1 TB liels fails, kur baitā Nr. N glabājas ||N|| vērtība (līdz $10^{12}$ tā nepārsniedz 89).

Konkrētas ||N|| vērtības un labākās N izteiksmes var pieprasīt adresē:

http://wiki.oranzais.lumii.lv/~janis/Special:Complexity

## Publikācijas

Harry Altman and Joshua Zelinsky. Numbers With Integer Complexity Close to the Lower Bound. *INTEGERS, The John Selfridge Memorial Volume*, Vol. 12A (2012) (preprint available online)

J. Iraids, K. Balodis, J. Cernenoks, M. Opmanis, R. Opmanis, K. Podnieks. Integer Complexity: Experimental and Analytical Results. *Scientific Papers University of Latvia, Computer Science and Information Technologies*, Vol. 787, 2012, pp. 153-179 (available online)