

Investigate the size (the number of instances of atomic formulas) of the proof  $[L_1, L_2, MP]: A_1, A_2, \dots, A_n, B \vdash C$  as a function  $g(m)$  of the size  $m$  of the proof  $[L_1, L_2, MP]: A_1, A_2, \dots, A_n, B \vdash C$ .

Uzdevumā prasītais pārveidojums starp diviem pierādījumiem ir dedukcijas teorēmas pielietošana. Lai saskaitītu atomāro formulu skaita atkarību šajos pierādījumos, izmantosim dedukcijas teorēmas pierādījumu (Sergejs Kozlovičs, 2004.g.)

Pierādījuma būtība ir, lai katrai formulai  $F$  pierādījumā  $[L_1, L_2, MP]: A_1, A_2, \dots, A_n, B \vdash C$  eksistētu formula  $B \rightarrow F$  pierādījumā  $[L_1, L_2, MP]: A_1, A_2, \dots, A_n, B \vdash C$ . Līdz ar to beigās nonāksim pie formulas  $B \rightarrow C$ , formulas  $C$  vietā, kas arī ir dedukcijas teorēmas mērķis.

Saskaņā ar Kozloviča pierādījumu katra formula  $F$  var būt:

- aksioma  $L_i$  vai kāda no hipotēzēm  $A_i$ . Tātad tā ir vienmēr patiesa. Tādā gadījumā, lai nokļūtu pie formulas  $B \rightarrow F$ , varam rakstīt trīs formulas:

$$\begin{aligned} &F \\ &F \rightarrow (B \rightarrow F) \\ &B \rightarrow F \end{aligned}$$

- hipotēze  $B$ . Tādā gadījumā, lai iegūtu formulu  $B \rightarrow B$ , rakstām šādas formulas:

$$\begin{aligned} &B \rightarrow (C \rightarrow B) \\ &(B \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow B)) \rightarrow ((B \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow B)) \\ &B \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow B) \\ &(B \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow B) \\ &B \rightarrow B \end{aligned}$$

- ir iegūta no augstāk esošajām formulām  $F_j \rightarrow F$  un  $F_j$  ar MP palīdzību. Tas nozīmē, ka pierādījumā  $[L_1, L_2, MP]: A_1, A_2, \dots, A_n, B \vdash C$  jau ir formulas  $B \rightarrow (F_j \rightarrow F)$  un  $B \rightarrow F_j$ , un varam pievienot šīs formulas, lai iegūtu  $B \rightarrow F$ :

$$\begin{aligned} &(B \rightarrow (F_j \rightarrow F)) \rightarrow ((B \rightarrow F_j) \rightarrow (B \rightarrow F)) \\ &(B \rightarrow F_j) \rightarrow (B \rightarrow F) \\ &B \rightarrow F \end{aligned}$$

Ja pierādījumā  $[L_1, L_2, MP]: A_1, A_2, \dots, A_n, B \vdash C$  ir  $x$  atomāras formulas (katrā saliktajā formulā  $S_f, S_j, S_b$  atomāro formulu attiecīgi), tad pierādījumā  $[L_1, L_2, MP]: A_1, A_2, \dots, A_n, B \vdash C$  varam saskaitīt šādas atomāras formulas.

- gadījumā atomāru formulu skaits, kas tiks pievienotas pierādījumam, būs  $S_f \cdot 4 + S_b \cdot 2$ ;
- gadījumā –  $S_b \cdot 18 + 5$ ;
- gadījumā –  $S_b \cdot 6 + S_f \cdot 3 + S_f \cdot 4$ .

Nav zināms, cik pierādījumā būs 1. un cik 3. gadījumi, taču zināms, ka 2. gadījums nebūs vairāk par vienu reizi. Trešais gadījums ir "sliktāks" (satur vairāk atomāro formulu) par pirmo, līdz ar to, ja pieņem, ka formula  $B$  ir atomāra, kopsummā  $g(m) \leq (m-1) \cdot 7 + 6 + 23 = 7m + 22$ .

Ja formula  $B$  nav atomāra un  $n$  ir atomāro formulu skaits formulā  $B$ , tad  $g(m, n) \leq (m-1) \cdot 7 + 6 \cdot n + 18 \cdot n + 5 = 7m + 24n - 2$ .