[Uz personīgo lapu]

Kā iesākās bezgalīgo kopu teorija?

2 lekcijas kursā “Matemātikas pamatjēdzieni”

Kārlis Podnieks, LU

Literatūra:

K. Podnieks, What is Mathematics: Gödel's Theorem and Around. Edition 2015, 2.nodaļa.

View Usage Statistics...

Senajā Grieķijā...

6.-5.gadsimts PMĒ. **Pitagors** un viņa skola. Samosas sala. Krotonas pilsēta Itālijas dienvidos.

1. Vai [naturālie] skaitļi kaut kur beidzas? Kurā brīdī radās nojausma, ka tie nebeidzas? Nojausma par bezgalību...

Pirmā (vai otrā – pēc Pitagora teorēmas) matemātikas teorēma: Pirmskaitļu ir vairāk par jebkuru iepriekš uzdotu daudzumu. [Mēs šodien teiktu: pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.]

Pierādījums. Skaitlis $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$ nedalās ar $p_1, p_2, \ldots p_k$, tātad tas dalās ar kādu citu pirmskaitli. Q.E.D.

2. Cik punktu ir taisnes nogrieznī? Galīgs skaits? Un visi ir vienādi? Bezgalīgu skaitu punktu taisnes nogrieznī tai laikā neviens iedomāties nevarēja...

Bet no Pitagora teorēmas seko, ka ja kvadrāta malā ir *a* punktu un diagonālē – *d* punktu, tad $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, tātad $\left(\frac{d}{a}\right)^2 = 2$, kas nav iespējams [pārliecinieties paši]. Pretruna. Ko tas nozīmē?

Tā radās pirmā krīze matemātiķu domāšanā. Īsta bezgalības jēdziena vēl nebija. Bezgalīgu skaitu punktu taisnes nogrieznī tai laikā neviens iedomāties nevarēja...

Grieķu matemātiķu atrastā izeja no situācijas: uzskatīsim, ka nogriežņi nesastāv no punktiem, punktus tajos var tikai atzīmēt.

Eidoksa proporciju teorija, Eiklīda "Elementi", 5.grāmata (4.gadsimts PMĒ).

Galileo (1564-1642)

Galileo paradokss (1638.gads): No vienas puses, [naturālo] skaitļu **kvadrātu ir daudz mazāk** par pašiem skaitļiem, jo tie ir reti sastopami:

1, 2, 3, **4**, 5, 6, 7, 8, **9**, 10, 11, 12, 13, 14, 15, **16**, 17, 18, 19, 20, ...

No otras puses: katram skaitlim ir kvadrāts, un katram kvadrātam ir atbilstošais skaitlis, kura kvadrāts tas ir.

1, 4, 9, 16, ...

1, 2, 3, 4, 5, ...

Tātad visus naturālos skaitļus var sanumurēt, par numuriem izmantojot kvadrātus! [Galileo pirmais iedomājās bezgalīgām kopām izmantot to pašu salīdzināšanas metodi, ko izmanto galīgam kopām.]

Tātad **kvadrātu ir tikpat, cik skaitļu**? Pretruna... [ar ierasto intuīciju jeb fīlingu]

Galileo no tā secināja, ka "bezgalīgus daudzumus" nav jēgas salīdzināt. Salīdzināt var tikai "galīgus daudzumus".

240 gadu vēlāk, 1870-jos gados **Georgs Kantors** piedāvāja citu risinājumu: uzskatīsim, ka kvadrātu tiešām ir tikpat, cik skaitļu, un ka tam nebūs kaitīgu seku. (Bet būs jāatsakās no domas, ka daļa ir mazāka par veselo...)

Bernards Bolcano (1781-1848)

1817.gadā viņš pierādīja teorēmu, ko tagad sauc

Bolcāno-Veierštrāsa teorēma. Katrai ierobežotai reālu skaitļu virknei eksistē konverģenta apakšvirkne [mūsdienu formulējums].

Pierādījums. Visa virkne A atrodas segmentā [a, b], veidojam apakšvirkni A'. Dalām segmentu [a, b] uz pusēm. Vienā no pusēm [a', b'] atrodas bezgalīgi daudz virknes A locekļu, vai ne? [Jauns fīlings? Agrāk neviens tā nejautāja...] Vienu no tiem ņemam par virknes A' pirmo locekli a'. No virknes A izmetam visus to locekļus, kas atrodas pirms a'. Pēc tam atkārtojam to pašu ar segmentu [a', b'], utt.

N-jā solī mēs iegūstam virknes A' n-to locekli, un visi turpmākie A' locekļi atradīsies segmentā, kura garums ir $\frac{b-a}{2^N}$. Skaidrs, ka virkne A' konverģē, vai ne? Vai tā konverģē uz kādu punktu vai uz caurumu? Uz punktu! [Jauns fīlings? A' konvergē uz kādu punktu, nevis uz caurumu... Par cauruma iespējamību Bolcano pat neiedomajās.] Q.E.D.

Faktiski te tiek veidots jauns priekšstats:

Kas notiek, ja uz taisnes nogriežņa atzīmē bezgalīgi daudz punktu? Atbilde: šie punkti “kondensējas” ap vismaz vienu nogriežņa punktu.

Punktu, kuram jebkurā patvaļīgi mazā apkārtnē atrodas bezgalīgi daudz kopas K punktu, sauc par kopas K **kondensācijas punktu**.

Bolcāno-Veierštrāsa teorēma (senatnīgāks formulējums): Katrai ierobežotai bezgalīgai punktu kopai eksistē vismaz viens kondensācijas punkts.

1872.gads: Georgs Kantors (1845-1918)

Risinot konkrētu matemātisku problēmu (par Furjē rindu konverģences apgabaliem), Kantoram izveidojās fīlings, ka bezgalīgās punktu kopas uz taisnes var būt arī ļoti ļoti sarežģītas.

Piemērus sk. grāmatas sadaļas 2.1 sākumā: ja kondensācijas punktu ir bezgalīgi daudz, tad arī tie kondensējas – ap kādu “2.kārtas kondensācijas punktu”. Utt. Kas ir bezgalīgas kārtas kondensācijas punkts?

Uzdevums 2.1.

Tā Kantoram (2500 gadu pēc atteikšanās) atkal sāka veidoties priekšstats, ka **taisnes nogrieznis sastāv no punktiem, ka punkti ar racionālām koordinātēm (t.i. arī paši racionālie skaitļi) veido kopu utt.**

Kā salīdzināt bezgalīgās kopas?

Galileo, salīdzinot naturālo skaitļu kvadrātu kopu ar visu naturālo skaitļu kopu, secināja, ka salīdzināt bezgalīgas kopas nav jēgas, jo apakškopa var iznākt “vienāda” ar pašu kopu. Tas bija pretrunā ar tolaik ierasto intuīciju.

Kantors, sastapies ar bezgalīgo kopu daudz lielāku dažādību nekā Galileo, nolēma, ka salīdzināšana nekādu kaitējumu nodarīt nevar. Salīdzināšanas princips – tāds pats kā Galileo: vienu kopu mēģināt sanumurēt, par numuriem izmantojot otras kopas elementus.

Sākotnējā dabiskā **hipotēze**: **racionālo skaitļu noteikti ir vairāk** nekā naturālo, jo tie uz taisnes ir novietoti **blīvi**.

1873.gada rudens: negaidīti atklājumi!

1) Racionālo skaitļu ir tikpat daudz kā naturālo.

Pierādījums: mūsdienu datoriķiem – ļoti viegls. Skaitļu pāra kodēšana ar vienu skaitli.

2) Nogriežņa punktu [reālo skaitļu] ir vairāk nekā naturālo skaitļu.

Divi pierādījumi:

1. Ar nogriežņu dalīšanu 3 daļās (sk. grāmatā).

2. Izmantojot skaitļu decimālos pierakstus. Pieņemsim, ka intervāla (0, 1) visus punktus var sanumurēt ar naturāliem skaitļiem. Ņemam sanumurēto punktu koordināti virkni:

0, **1**234...

0, 5**4**32...

0, 7**8**9...

0, 649**9**...

...

Un ar **diagonālmetodi** veidojam skaitli, kas šajā virknē nebūs sastopams:

0, 2518...

(0 un 9 neizmantojam, lai neiegūtu 0,xxxxx000... vai 0,xxxxx999...).

Esam ieguvuši pretrunu. Q.E.D.

[Diagonālmetodi vēl sastapsiet (ja vēl neesat) – piemēram, algoritmu teorijā.]

Secinājums: Bezgalīgās kopas ne visas ir "vienāda lieluma".
Eksistē vismaz divas dažādas bezgalības!

Kā salīdzināt bezgalīgās kopas?

Galileo principu nu vajadzēja vispārināt: kā varēsim salīdzināt kopas, kuru elementus nevar sanumurēt ar naturāliem skaitļiem?

Pirmā vispārīgā definīcija:

Kopas A, B ir "vienāda lieluma" (vienāda apjoma), **ja kopas B elementus var sanumurēt, par numuriem izmantojot kopas A elementus.**

Precīzāk, te runa ir par savstarpēji viennozīmīgu atbilstību:

Kopas A, B ir "vienāda lieluma" (vienāda apjoma, $|A|=|B|$), ja eksistē [visur definēta] funkcija $f : A \to B$:

a) kas ir viennozīmīga, t.i. $\forall\ x, y [x \neq y \to f(x) \neq f(y)]$;

b) kuras vērtības noklāj visu kopu B:
$\forall\ y [y \in B \to \exists x (x \in A \wedge f(x) = y)]$.

Piemēri: aplūkosim uzdevumu 2.2.

Vēl divas vispārīgas definīcijas:

Kopas A apjoms nepārsniedz kopas B apjomu $(|A| \leq |B|)$ **,** ja eksistē viennozīmīga funkcija $f: A \to B$.

Kopas A apjoms ir mazāks par kopas B apjomu $(|A| \lhd |B|)$ **, ja** $|A| \le |B|$ un $|A| \ne |B|$.

Šrēdera-Bernšteina teorēma (Kantora "nojauta", kas pierādīta tikai 1897.gadā). Ja $|A| \le |B|$ un $|A| \ge |B|$, tad $|A| = |B|$.

[Bez šīs teorēmas kopu apjomu salīdzināšana būtu dīvaina...]

1877.gads:

Salīdzināsim **divdimensiju** figūras ar (viendimensiju) nogriežņiem.

Dabiskā sākotnējā hipotēze: kvadrātā ir vairāk punktu nekā tā malā (taisnes nogriezni). Kantors ilgi cīnījās, lai to pierādītu. Līdz iedomājās pierādīt pretējo:

Teorēma. Kvadrāta iekšienē ir tikpat daudz punktu kā kvadrāta malā.

Pierādījums ir viegls, sk. grāmatā.

Uzdevums 2.3.

1878.gads: kontinuuma hipotēze

Iedomājamies patvaļīgu ***bezgalīgu*** punktu kopu uz taisnes nogriežņa.

1) "Lieluma ziņā" tā *nebūs mazāka* par visu naturālo skaitļu kopu.

Pierādījums-uzdevums.

2) "Lieluma ziņā" tā *nebūs lielāka* par nogriežņa visu punktu kopu.

3) Jautājums: Vai "lieluma ziņā" šī kopa var būt "**pa vidu**"? T.i. lielāka par visu naturālo skaitļu kopu, bet mazāka par nogriežņa visu punktu kopu?

Kontinuuma hipotēze (CH): Tādas "pa vidu" kopas neeksistē.

Kantors pie šīs hipotēzes nonāca, būvējot visdažādākās punktu kopas. Visas tās iznāca vai nu 1.tipa, vai 2.tipa, un neviena nebija 3.tipa. Pēc tam viņš daudzus gadus centās šo hipotēzi pierādīt, bet nesekmīgi.

Šodien mēs zinām, ka viņam tas nevarēja izdoties, un arī mums nevar izdoties... [Vai Jums jau tagad ir ideja, kā varētu pierādīt, ka tas nevar izdoties?]

“Bezgalību ir bezgalīgi daudz”

Sākumā Kantors konstatēja, ka eksistē “vismaz divas bezgalības”. Vispārinot savu metodi, viņš pierādīja, ka “bezgalību ir bezgalīgi daudz”.

Kopas K visu apakškopu kopa: $P(K)=\{y \mid y\subseteq K\}$.

Kombinatorika: ja K ir galīga kopa no *n* elementiem, tad P(K) sastāv no 2^n elementiem. Jeb: $|P(K)|=2^{|K|}$ un, protams,

$$|K|<|P(K)| .$$

Kantora teorēma (vispārīgais gadījums, kad kopa K var būt kā galīga, tā bezgalīga). Kopu P(K) nevar sanumurēt, par numuriem izmantojot kopas K elementus. Jeb: $|K|<|P(K)|$ gan galīgām, gan bezgalīgām kopām.

Pierādījums. Paņemsim jebkuru funkciju $f: K\to P(K)$, un parādīsim, ka tās vērtības nevar noklāt visu kopu P(K). Tad teorēma būs pierādīta.

Sekojot **diagonālmetodes** idejai, aplūkosim K apakškopu $y=\{z \mid z\in K \wedge z\notin f(z)\}$.

Skaidrs, ka $y\subseteq K$, t.i. $y\in P(K)$. Parādīsim, ka *y* nevar būt funkcijas *f* vērtība. Tiešām, pieņemsim no pretējā, ka kādam $z\in K, y=f(z)$. Noskaidrosim, vai $z\in y$.

Ja $z\in y$, tad $z\in f(z)$ un $z\notin y$. Pretruna.

Ja $z\notin y$, tad $z\notin f(z)$ un $z\in y$. Atkal pretruna. Q.E.D.

1895.gads: Kantora paradokss

Tūlīt pēc šīs vispārīgas teorēmas pierādīšanas Kantors saprata, ka ir "nokļuvis grūtā situācijā". Tiešām, paņemsim Kantora teorēmā K=V, kur

V=visu kopu kopa.

Tātad $|V|<|P(V)|$. Bet tā kā V satur pilnīgi visas kopas, tad $P(V)\subseteq V$ un tāpēc nevienādība $|V|<|P(V)|$ nav iespējama!

Paša Kantora acīs šī pretruna padarīja viņa mūža darbu (kopu teoriju) par apšaubāmu... Kā tas viņam beidzās?

1901.gads: Rasela paradokss

1901.gadā Bertrans Rasels izgudroja vēl vienkāršāku pretrunas izvedumu kopu teorijā, kas neprasa nekādu nopietnu teorēmu izmantošanu. Aplūkosim šādu kopu:

$$R=\{K \mid K\notin K\} .$$

Skaidrs, ka $\emptyset\notin\emptyset$, tāpēc $\emptyset\in R$.

Un tā kā $V\in V$, tad $V\notin R$

Noskaidrosim, vai $R\in R$.

Ja $R\in R$, tad $R\notin R$. Pretruna.

Ja $R\notin R$, tad $R\in R$. Atkal pretruna.

Secinājums.

Kopu teorijas pamatos kaut kas nebija kārtībā!

Ko darīt?

Izeja no situācijas tika atrasta 1908.gadā...

Kantora (pretrunīgās) kopu teorijas formalizācija

Lasiet grāmatas sadaļu 2.2.

Mēģināsim Kantora kopu teoriju formalizēt.

Predikātu valoda kopu teorijai: $x \in y\,;\, x = y$. Šī vienkāršā valoda, izrādās, ir **universāla** – tajā var izteikt jebkuru matemātisku apgalvojumu!

Formulu piemēri:

$x = \emptyset$ --> $\forall y \neg (y \in x)$;

$x = \{\emptyset\}$ --> $\forall y (y \in x \leftrightarrow y = \emptyset)$ -->

$\forall y (y \in x \leftrightarrow \forall z \neg (z \in y))$;

$x = \{y, z\}$ --> $\forall u (u \in x \leftrightarrow u = y \vee u = z)$;

$x \subseteq y$ --> $\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$;

$x = y \cap z$ --> $\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y \wedge u \in z)$;

$x = y \cup z$ --> $\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y \vee u \in z)$.

Kāpēc nevajag atomus?

Ekstensionalitātes aksioma (specifiska vienādība – kopu vienādība):

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y) .$$

Sarullēšanas (*comprehension*) aksiomu shēma (F – jebkura formula kopu teorijas valodā ar brīvu mainīgo x):

$$\exists x = \{y \mid F(y)\} \text{ --> } \exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow F(y)) .$$

[**Izvēles aksioma**.]

No šīs aksiomu sistēmas var izvest visu tradicionālo matemātiku! Bet šī sistēma ir pretrunīga!

Rasela paradoksa formālais izvedums no sarullēšanas aksiomu shēmas:

$$\exists R \forall y (y \in R \leftrightarrow \neg (y \in y)) \,;\, R \in R \leftrightarrow \neg (R \in R) .$$

Ko darīt? Kas ir situācijas cēlonis? Kur meklēt izeju?

1908.gads: Cermelo-Frenkeļa aksiomas

Palasiet grāmatas sadaļu 2.3.

Ernsts Cermelo (1908) un Abrahams Frenkels (1921).

Ideja: pretrunu cēlonis – sarullēšanas aksiomu shēma ir **pārāk vispārīga**, izeja no situācijas – **ierobežot šo shēmu**, atļaujot tikai tos gadījumus, kas reāli nepieciešami matemātisku struktūru būvēšanai.

Kopas, klases, Rasela paradokss un "īstas" klases (*proper classes*).

Ekstensionalitātes aksioma.

Izdalīšanas aksiomu shēma. Uzdevums 2.6 (b). Varam pierādīt tikai tukšās kopas eksistenci...

Pāru aksioma. Dekarta reizinājums – klase. Varam pierādīt tikai 0, 1 un 2 elementu kopu eksistenci...

Apvienojumu aksiomu shēma. Uzdevums 2.8 (a). Nu varam pierādīt patvaļīgi lielu galīgu kopu eksistenci... Bet bezgalīgas sanāk tikai klases...

Teorēma. Ja Dekarta reizinājums ir kopa, tad arī reizinātāji ir kopas.

Naturālie skaitļi kopu teorijā (klase N).

Bezgalības aksioma (kopa ω). Nu varam pierādīt **sanumurējamu** kopu eksistenci...

Pakāpes aksioma. Nu varam pierādīt **nesanumurējamu** kopu eksistenci... Arī reālo skaitļu kopu...

Teorēma. Ja reizinātāji ir kopas, tad arī to Dekarta reizinājums ir kopa.

[Substitūciju aksiomu shēma – Frenkela ieguldījums.]

[Izvēles aksioma.]

Kontinuuma hipotēzes liktenis

Palasiet grāmatas sadaļu 2.4.1.

Kantora un viņa sekotāju neveiksme nebija saistīta ar viņu nepietiekamo matemātisko izveicību! Jo:

$$Con(ZF) \rightarrow Con(ZF + AC + CH)$$ (Kurts Gēdels, 1938)

$$Con(ZF) \rightarrow Con(ZF + AC + \neg CH)$$ (Pols Koens, 1963)

Ja vēlaties, varat pat pieņemt, ka starp sanumurējamo kopu apjomu un nogriežņa punktu apjomu eksistē tieši 17 dažādi bezgalīgu kopu apjomi. Pretrunas tas neradīs, jo kopu teorijas aksiomas par šo jautājumu neko pateikt nespēj!

Mājas darbi

(2017) Uzdevums 2.2.

(2018) Uzdevums 2.3.

(2018) Uzrakstiet kopu teorijas formālajā valodā šādas formulas:

"x ir ne vairāk kā 3 elementi",
“y satur (kā elementus) visas x apakškopas”,
"x un y nešķeļas”,
"x ir bezgalīga kopa" (mēģiniet pateikt kaut ko par x apakškopām).

(2017) Uzdevums 2.5. (Kantora aksiomas) By using appropriate comprehension axioms:
a) prove the existence of the following sets (o is the empty set):
{o}, {o, {o}}; {o, {o}, {o, {o}}};
b) prove that the complement of a set, difference of two sets, intersection and union of any collection of sets ("set of sets") is a set.

(2018) Uzdevums 2.8 (b). (Cermelo-Frenkeļa aksiomas) Pierādiet, ka no aksiomām C1, C2, C3 seko, ka eksistē visas kopas, ko var uzrakstīt ar tukšās kopas simbolu, figūriekavām un komatiem. Piemēram, kopa

{o, {o, {o}}, {o, {o, {o}}}}.

(2018) Uzdevums 2.17 (a, b).

Uz personīgo lapu