Uz personīgo lapu

Ptolemaja epicikli, Furjē rindas un neironu tīkli

Lekcija kursā “Matemātikas pamatjēdzieni”

Kārlis Podnieks, LU

Paldies kolēģiem

prof. Guntim Bārzdiņam, prof. Jānim Bičevskim un
prof. Ģirtam Karnītim par iedvesmojošiem komentāriem.

Apolonijs no Pergas (~262 - ~190 BC)

Hiparhs (~190- ~120 BC)

Klaudijs Ptolemajs (~100 - ~170 AD)

Vai šie grieķu matemātiķi bija izgudrojuši “Furjē rindas” 2000 gadu pirms Furjē?

[Grūti to iedomāties, bet cilvēki ne vienmēr ir domājuši tā kā domājam mēs. Vai Zeme riņko ap Sauli? Cilvēki ne vienmēr tā ir domājuši. Un, precīzi runājot, tā nemaz nav taisnība!]

Tajos laikos uzskatīja, ka Saule un planētas riņķo ap Zemi (t.s. **ģeocentriskais modelis**). Tā taču izskatās dabā...

Saule lielas problēmas neradīja – tās kustība debesīs ļoti precīzi atbilst apļveida kustībai ap Zemi (bet ne gluži ap Zemes centru, sk. tālāk).

Bet planētas debesīs met cilpas (attiecībā pret zvaigznēm)...

[Cilpas var ieraudzīt, ja piemēram, reizi mēnesī atzīmē planētas stāvokli attiecībā pret zvaigznēm. Līdz tam ne katrs cilvēks aizdomāsies...]

Sk. animāciju Retrograde motion by Igor Glozman.

Plašāka info: [Mars retrograde](#) (NASA).

Kādai “reālai” kustībai ap Zemi šāda cilpveida kustība varētu atbilst (pieņemot, ka “viss” tiešām riņko ap Zemi)?

Grieķus iedvesmoja estētiska ideja: pasaules pamatā ir jābūt ideāli skaistām, perfektām lietām. Zvaigžņu un planētu kustības gadījumā tā būtu kustība pa apli. Tāpēc viņiem radās epiciklu ideja.

Apolonijs pirmais piedāvāja ideju (mēs teiktu, piedāvāja modeli), ka katra planēta kustas ap Zemi pa apli tikai “pa lielam”: īstenībā pa šo apli (**deferentu**) kustas vēl viena apļa (**epicikla**) centrs. Un pa šo epiciklu kustas pati planēta:

Sk. animāciju https://www.youtube.com/watch?v=KT3PmGVf6DU (by Tad Thurston)

Principā šo ideju var attīstīt tālāk: pa pirmo epiciklu kustas vēl viena apļa (**otrā epicikla**) centrs utt. Un tikai pa kādu *n*-to epiciklu kustas pati planēta.

Sk. arī animāciju Vikipēdijā, **Furjē rindas**, nodaļā Convergence.

Tiesa, Ptolemajs (un Hiparhs vēl pirms viņa) izvēlējās citu ceļu precīzāka modeļa izveidei. Visticamāk, viņa laika skaitlisko aprēķinu tehnika neļāva tikt galā ar modeli, kurā ir vairāku līmeņu epicikli. Otro epiciklu viņš izmantoja tikai Merkura kustības modelēšanai.

Sk. fizikas profesora nopietnu analīzi:

Richard Fitzpatrick. A Modern Almagest. An Updated Version of Ptolemy's Model of the Solar System, 2010.

Otrā epicikla ieviešanas vietā Ptolemajs atļāvās pārvietot lielo apļu (deferentu) centrus prom no Zemes centra. Šī papildus brīvības pakāpe ļāva sasniegt tam laikam izcilu planētu redzamās kustības imitācijas precizitāti, saglabājot pieņemamus aprēķinu apjomus (Saulei un 5 planētām - 6 nobīdīti deferenti un 6 epicikli, Saulei – 0, Merkuram – 2).

Šī Ptolemaja metode bez jebkādām modifikācijām tika izmantota 13.gs., sastādot t.s. Alfonsine tables planētu stāvokļu prognozēšanai. Šīs tabulas tika izmantotas pat vēl Kopernika un Keplera laikā.

Tam, ka viena epicikla sistēma izrādījas ļoti sekmīga, ir nopietns pamats. Šodien mēs zinām, ka Zeme un planētas samērā precīzi kustas ap Sauli pa elipsēm, kuru vienā fokusā ir Saule. Ptolemaja laika precizitātes līmenī šīs elipses varēja aizstāt ar apļiem, nobīdot to centrus elipšu fokusos (šos punktus Ptolemajs nosauca par ekvantiem, *equant)*. Un tad iznāk, ka "īstenībā" katras planētas kustību pret zvaigznēm nosaka divi nobīdīti apļi – planētas orbīta ap Sauli un Zemes orbīta ap Sauli. **Bet, ja par skata punktu izvēlas Zemi, tad šie divi apļi kļūst par deferentu un epiciklu!** Un tāpēc (Ptolemaja laika precizitātes līmenī) vairāk epiciklu labam modelim nevajadzēja! Izņēmums bija tikai Merkurs – tā kustības imitēšanai bija jāpievieno otrs epicikls (savukārt, Saulei pietiek ar deferentu vienu pašu).

Tādā veidā, pielāgojot deferentu un epiciklu rādiusus, ekvantus un rotācijas ātrumus, Ptolemajam izdevās savā modelī ļoti precīzi imitēt planētu redzamo kustību debesīs.

Ptolemaja modelis nekad nav uzskatīts par planētu "īstās" kustības attēlojumu, bet tikai par kinemātisku shēmu, kas imitē planētu redzamo kustību pret zvaigznēm. Redzamākais Ptolemaja shēmas defekts: tā nepareizi attēlo planētu spožuma un Saules izmēru izmaiņas gadu gaitā. Piemēram, Saules izmēriem gada laikā būtu jāmainās divkārt! Filozofiski nepieņemami likās arī tas, ka katras planētas deferentam bija savs centrs, t.i. "Ptolemaja Visumam" nebija vienota centra.

Palasiet par šīs problēma reālo (ne tik vienkāršo) vēsturi Vikipēdijā https://en.wikipedia.org/wiki/Deferent_and_epicycle.

16.gs. sākumā Koperniks saprata, ka ekvantu vietā var izmantot otrā līmeņa epiciklus, tādā veidā novēršot Ptolemaja sistēmas "filozofisko defektu". Viņa laikā skaitļošanas iespējas bija lielākas (arābu cipari!), tāpēc to varēja atļauties...

Kopernika laikā atronomisko novērojumu precizitāte jau bija labāka nekā Ptolemaja laikos. Koperniks konstatēja, ka Marss no Ptolemaja prognozēm novirzās par 2 grādiem, bet Saturns – par 1,5 grādiem. Viņš saprata, ka modelī šīs novirzes var kompensēt, ieviešot papildus epiciklu līmeņus. Un viņš saprata arī, ka atšķirībā no ekvantu idejas, **epiciklu mehānisms ir universāls**.

16.gs. lielāko skaitļošanas iespēju dēļ Koperniks varēja atļauties izskaitļot, kādas sekas varētu būt **heliocentrisma idejai** – liekot Zemei riņkot ap Sauli līdzās citam planētām. Izmantojot tos pašu "perfektos" apļveida deferentus un epiciklus, izrādījās, ka **jaunajā modelī jau pirmā līmeņa epicikli sanāk izmēros daudz mazāki nekā Ptolemajam.** Jo Kopernika pirmā līmeņa epicikliem vajadzēja kompensēt tikai planētu eliptisko orbītu ekscentricitātes, kamēr Ptolemaja epicikli kompensēja arī neizdevīgo skata punktu (no Zemes).

Bet Kopernika laika novērojumu precizitātes līmenī ar vienu epiciklu līmeni vairs nepietika. Viņa modeļa pirmajā versijā (1514.gads) bija 34 deferenti un epicikli, galīgajā versijā (1543.gads) – vēl vairāk.

Nepatiesa leģenda. Cik deferentu un epiciklu ir vajadzīgs, lai planētu redzamo kustību (augstā precizitātes līmenī) attēlotu Ptolemaja un Kopernika modeļos? Abos modeļos – daudz. Bet kurš modelis labāks – ģeocentriskais vai heliocentriskais, kurā epiciklu būs mazāk? Ir radusies nepatiesa leģenda, ka Kopernika modelī vajadzīgais epiciklu skaits ir daudz mazāks un ka tieši šis faktors pamato heliocentriskā modeļa pārākumu. Cik noprotu, Kopernika paša epiciklus precīzi saskaitīt neviens neprot, un attiecīgos precīzos datoreksperimentus, kas to varētu noskaidrot, arī neviens nav gribējis uzņemties. Lasot Ficpatrika grāmatu, man tagad liekas, ka varētu **pierādīt teorēmu**, ka epiciklu skaits abos modeļos daudz atšķirties nevar. Modeļu sarežģītību rada nevis skata punkta izvēle, bet mēģinājumi imitēt eliptisku kustību, kombinējot tikai apļveida kustības.

Bet viss "epiciklu pasākums" varēja būt sekmīgs tikai pateicoties matemātiskai teorēmai, ko ne grieķi, ne Koperniks nezināja, bet būtībā – izmantoja to:

"Teorēma". Jebkuru planētas redzamo kustību debesīs var pēc patikas precīzi imitēt ar iekļautiem epicikliem pietiekamā skaitā.

Ptolemaja epicikli spēj uzzīmēt debesīs pat **cilvēka portretu**, sk. Ptolemy and Homer (Simpson) by Christián Carman and Ramiro Serra (paldies Renāram Liepiņam par norādi).

Šo teorēmu (jau daudz vispārīgākā veidā) 19.gadsimta sākumā pierādīja **Furjē** (sk. tālāk).

Kāda ar epicikliem sanāk matemātika?

Ja planēta kustas ap Zemi pa apli, tad kustības plaknē planētas pozīcijas projekcijas uz horizontālo un vertikālo asi attiecīgi ir [Bilde]:

$$R_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_0} + \phi_0\right) \; ;$$

$$R_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_0} + \phi_0\right) \; ,$$

kur R_0 ir rādiuss, P_0 – apgrieziena laiks (periods), φ_0 – fāzu nobīde un t – laiks. [cos t periods ir 2π, cos 2πt periods – 1, bet cos 2πt/P periods ir P]

Ja planēta kustas pa pirmo epiciklu, tad kustības projekcijas uz asīm ir:

$$R_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_0} + \phi_0\right) + R_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_1} + \phi_1\right) \; ;$$

$$R_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_0} + \phi_0\right) + R_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_1} + \phi_1\right) \; ,$$

kur R_i ir rādiusi, P_i – apgriezienu periodi, φ_i – fāzu nobīdes un t – laiks. Utt., ja epiciklu skaits ir lielāks:

$$R_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_0}+\phi_0\right)+R_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_1}+\phi_1\right)+R_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{P_2}+\phi_2\right)+\ldots \quad ;$$

$$R_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_0}+\phi_0\right)+R_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_1}+\phi_1\right)+R_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{P_2}+\phi_2\right)+\ldots \quad .$$

Redzam, ka (vispārinot) “epiciklu fenomens” īstenībā atbilst iespējai “katru” periodisku funkciju *f(t)* pēc patikas precīzi attēlot kā summu:

$$f(t)\approx\sum_{n=0}^{N} R_n \sin\left(\frac{2\pi t}{P_n}+\phi_n\right) \quad .$$

Ja esat kādreiz redzējuši **Furjē rindu** formulas, tad šī formula Jums kaut ko atgādina... Sk. tālāk.

Un starp citu, **šajā** formulā jau ir iekodēts arī ... **neironu tīkls!** Sk. tālāk.

Secinājums, ka Ptolemaja epiciklu pamatā ir tas pats fenomens, kas Furjē rindu pamatā, izrādās, nav mans:

“The interpretation that the Fourier transform (and (9)) has in terms of deferent and epicyclical motions has been noted by many; the more ancient that I could retrieve is in a memory of **1874** of G. Schiaparelli, reprinted in [28].“

Sk. Giovanni Gallavotti. Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov, *Rend. Mat. Acc. Lincei*, s. 9, v. 12:125-152 (2001)

Giovanni Schiaparelli (1835-1910), itāļu astronoms, Marsa pētnieks (1877.gads – Marsa “kanāli”).

Mūzikas matemātika

Kā skanēja mūzika pirms 2500 gadiem – Senajā Grieķijā? Par seno grieķu mūzikas skanējuma rekonstrukciju sk. BBC ziņu:

http://www.bbc.com/news/business-24611454

Jau Pitagora skolā mūzikas skaņas analizēja, salīdzinot dažāda garuma stīgu skanējumu, konstatēja, ka labi skan kopā stīga ar pusstīgu, trešdaļstīgu utt. Mūslaiku terminos: skaņa ar frekvenci ω skan labi kopā ar skaņu frekvencēm

$2\omega, 3\omega, \ldots$. Tās pieņemts saukt par *harmonikām*.

Šādu skaņu summēšanos mūsdienās apraksta formula (ω ir pamattoņa frekvence, t – laiks, *a(t)* – skaņas amplitūda):

$$a(t)=\sum_{n=1}^{N} c_n \sin(2\pi\omega \boldsymbol{n} t) \ .$$

Šī formula vēl vairāk atgādina Furjē rindas...

Sk. īsu sacerējumu par šo tēmu, ko savulaik uzrakstījusi studente:

Janelle K. Hammond. Mathematics of Music. UW-L Journal of Undergraduate Research XIV (2011).

Sk. arī Harmonic Vikipēdijā.

Žozefs Furjē (1768-1830)

Sk arī **Furjē rindas** Vikipēdijā.

Furjē 1807.gadā atrisināja t.s. **siltuma vadīšanas vienādojuma** vispārīgo gadījumu.

Vienas dimensijas (t.i. tieva stieņa) gadījumā šis uzdevums izskatās šādi [bilde]:

1) Ir dots sākuma nosacījums – stieņa punktu temperatūru sadalījums pie *t=0 un* $0 \le x \le L$ (*L* ir stieņa garums):

$$u(x,0)=u_o(x) \ .$$

2) Mūs interesē, kā mainīsies temperatūru sadalījums, laikam t ejot uz priekšu, t.i. funkcija $u(x,t)$ – stieņa temperatūra punktā *x* laika momentā *t.*

3) Doti arī robežnosacījumi – stieņa gali ir izolēti, tur siltuma plūsmas nav:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0 ; \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0 \ .$$

4) Kas notiks tālāk – laikam *t* ejot uz priekšu? Siltuma izplatīšanās procesu apraksta vienādojums (α – pozitīva konstante):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \quad .$$

5) No visiem šiem nosacījumiem ir jāatrod funkcija $u(x,t)$.

Furjē ideja: meklēsim atrisinājumu kā sinusoīdu superpozīciju:

$$u(x,t)=a_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(b_n x+c_n) \quad .$$

No vienādojuma un nosacījumiem tad seko (pamēģiniet paši) , ka

$$u(x,t)=d_0+\sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\frac{\alpha\pi k_n^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{\pi k_n x}{L}+\frac{\pi}{2}\right) ,$$

kur d_n, k_n ir konstantes, pie tam k_n ir veseli skaitļi. Furjē likās, ka nekas slikts nenotiks, ja paņemsim $k_n=n$. Sākuma nosacījums tad izskatās šādi:

$$u(x,0)=d_0+\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}+\frac{\pi}{2}\right)=u_0(x) \quad , (0)$$

kur $u_0(x)$ ir “patvaļīga” funkcija segmentā *[0, L]* (stieņa temperatūra punktā *x* pie *t=0*). Tieši no šīs vienādības būtu jārodas konstantēm d_n .

Šeit esam atkal nonākuši pie tās pašas epiciklu problēmas:

Problēma. Vai Furjē izvēlētā metode tiešām ir pietiekami universāla? Vai summas (0) koeficientus $d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots$ vienmēr varēsim piemeklēt tā, lai tādas sinusu rindas summā sanāktu **jebkura** dotā funkcija $u_0(x)$?

Furjē 1807.gadā parādīja, ka to varēsim, tātad viņš tiešām ir atrisinājis siltuma vadīšanas vienādojuma vispārīgo gadījumu: lai to izdarītu, vajag iemācīties doto funkciju $u_0(x)$ “izvirzīt” rindā (0) – **Furjē rindā**.

[Furjē pierādījums nevarēja būt korekts mūsdienu izpratnē, jo tolaik vēl nebija izgudrota precīza funkcijas jēdziena definīcija. Tikai vēlāk, kad tika ieviestas precīzas funkcijas un nepārtrauktības jēdzienu definīcijas, citi matemātiķi šo pierādījumu padarīja matemātiski korektu mūsdienu izpratnē.]

Furjē rindas

“Atkabināsim” tagad savas sinusu rindu summas no siltuma vadīšanas vienādojuma, un jautāsim vispārīgāk:

Vai **katru** “pieklājīgu” (reālo skaitļu) funkciju *f(x)* segmentā $[x_0, x_0+P]$ var attēlot kā sinusu summu:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{P}+d_n\right)\right) \text{ , (1)}$$

kur a_n, c_n un d_n ir konstantes?

“Pamattonis” šeit ir sinusoīda $c_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{P}+d_1\right)$. Tās periods ir P [jo $\sin x$ periods ir 2π, $\sin 2\pi x$ periods ir 1, bet $\sin\frac{2\pi x}{P}$ periods ir P].

Tālākie saskaitāmie ir “pamattoņa” harmonikas. Vai katru “pieklājīgu” funkciju var attēlot kā harmoniku rindas summu?

Izmantojot identitāti $\sin(a+b)=\sin a \cos b+\cos a \sin b$, iegūstam pierastāku Furjē rindas pieraksta formu:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nx}{P}+b_n \sin\frac{2\pi nx}{P}\right) \text{ , (2)}$$

kur $a_n=c_n \sin d_n ; b_n=c_n \cos d_n$.

[No pieraksta formas (2) var iegūt atpakaļ formu (1): $c^2=a^2+b^2 ; d=\arccos\frac{b}{c}$.]

Kā atrast vajadzīgās koeficientu a_n, b_n vērtības?

Ja pareizināsim vienādības (2) abas puses ar $\cos\frac{2\pi nx}{P}$ vai $\sin\frac{2\pi nx}{P}$ un integrēsim segmentā $[x_0, x_0+P]$, tad visi saskaitāmie, izņemot vienu, kļūst vienādi ar nulli, un tā mēs iegūsim, ka

$$\int_{x_0}^{x_0+P} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{P}dx=\frac{1}{2}Pa_n \; ;$$

$$\int_{x_0}^{x_0+P} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{P}dx=\frac{1}{2}Pb_n \; .$$

Tātad koeficientus a_n, b_n viennozīmīgi nosaka funkcija *f* , un mēs varam izteiksmi (2) saukt par **funkcijas *f* Furjē rindu** segmentā $[x_0, x_0+P]$. Un tad jautāt: kurām funkcijām viņu Furjē rindas tiešām konverģē uz pašu funkciju? [Tas nav acīm redzami garantēts, sk. tālāk.]

[Nepārejot uz sin+cos, Furjē rindu koeficientu formulas nesanāk tik vienkāršas un skaistas!]

Minimālais nosacījums – *f* ir jābūt *integrējamai* segmentā $[x_0, x_0+P]$ (lai mēs vispār varētu izrēķināt koeficientus). Bet tik vienkārši tomēr nesanāk. Viens no iespējamiem pietiekamajiem nosacījumiem:

Teorēma. Ja funkcijai f segmentā $[x_0, x_0+P]$ *eksistē galīgi kreisie un labējie atvasinājumi*, tad tās Furjē rinda (2) konverģē uz *f(x)* jebkuram *x* šajā segmentā.

Piemēram, tā tas notiek slīpām zāģveida funkcijām, vai visur diferencējamām funkcijām. [Bilde]

Tas ir Furjē problēmas atrisinājums.

Bet eksistē *nepārtrauktas* funkcijas *f*, kam Furjē rinda konverģē uz *f(x)* ne katram *x*. Tāpēc Furjē rindu konverģences pierādījums nav nemaz tik vienkāršs.

[Atceramies Georgu Kantoru 1872.gadā – pētot Furjē rindu konverģenci, viņš nonāca pie vispārīga jēdziena par bezgalīgām kopām. Furjē rindu “realitāte” neļāva viņam nobīties un atkāpties, kā to savulaik izdarīja Galilejs.]

Sk. arī interesantu t.s. **Gibsa fenomenu**.

Funkciju aproksimācija

Astronomi, inženieri un datoriķi nevar izmantot bezgalīgas rindas, kas konverģē bezgalībā, bet toties precīzi. Viņi izmanto šo rindu galīgus sākuma gabalus, un vēlas, lai tie pietiekami tuvu aproksimētu vajadzīgo funkciju *f*. Tieši aproksimācijas mums būs jāiegūst, arī būvējot neironu tīklus.

Furjē rindas labi **aproksimē** jebkuru nepārtrauktu funkciju, ne tikai diferencējamās:

Teorēma. Ja funkcija *f* segmentā $[x_0, x_0+P]$ ir *vienmērīgi nepārtraukta*, tad katram $\epsilon>0$ eksistē tāds N un tādi koeficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, ka visiem *x* šajā segmentā:

$$\left| f(x)-a_0-\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{P}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{P}\right)\right|<\epsilon \; .$$

Bāzes funkciju telpās

Vienu abstrakcijas līmeni augstāk, Furjē rindu problēma izskatās vēl interesantāk.

Visas (reālo skaitļu) funkcijas, kam segmentā $[x_0, x_0+P]$ eksistē kreisie un labējie atvasinājumi, veido lineāru (vektoru) **telpu**, ko apzīmēsim ar $C^{1/2}[x_0, x_0+P]$: šīs funkcijas var saskaitīt un reizināt ar skaitli, tām var rēķināt skalāros reizinājumus:

$$\langle f, g\rangle=\int_{x_0}^{x_0+P} f(x)g(x)dx \; .$$

Šajā telpā varam mēģināt ieviest **koordinātu sistēmu**. Tā būs kāda funkciju virkne $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, un tad patvaļīgu telpai piederošu funkciju *f* varēsim mēģināt izteikt kā

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \; .$$

Koeficientus a_n tad mēs varētu uzskatīt *f* **koordinātēm** mūsu telpā. Ja tādā veidā var izteikt katru telpas funkciju, tad virkni $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ sauksim par **telpas bāzi**.

Šādā stilā ar funkcijām strādā matemātikas nozare, ko sauc par **funkcionālo analīzi**.

Atcerēsimies mūsu galveno teorēmu:

Teorēma. Ja funkcijai f visur segmentā $[x_0, x_0+P]$ *eksistē galīgi kreisie un labējie atvasinājumi*, tad tās Furjē rinda (2) konverģē uz *f(x)* jebkuram *x* šajā segmentā.

Šo teorēmu tagad var pārformulēt tā:

Teorēma. Funkcijas $1, \cos\frac{2\pi nx}{P}; \sin\frac{2\pi nx}{P} (n=1,2,\ldots)$ veido telpas $C^{1/2}[x_0, x_0+P]$ bāzi.

[Vai šai telpai ir vēl arī citas vienkāršas bāzes?]

[Te sākas ceļš uz Hilberta telpām un kvantu mehāniku...]

Neironu tīkli (piemērs)

Paldies Renāram Liepiņam par norādi.

http://playground.tensorflow.org/

Neironu tīkli (teorija)

Sk. manu lekciju **Neironu tīkli datizracē** līdz universālās aproksimācijas teorēmām.

Furjē rindas kā neironu tīkli

Viena argumenta funkciju gadījumā neironu tīkls ar vienu vidējo slāni rēķina funkciju

$$f(x) \approx c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_i h(a_i x + b_i) \ , \qquad (3)$$

kur h(x) ir neironu aktivācijas funkcija.

Atcerēsimies teorēmu:

Teorēma. Ja funkcijai *f* segmentā $[x_0, x_0 + P]$ ir *vienmērīgi nepārtraukta*, tad katram $\epsilon > 0$ eksistē tāds N un tādi koeficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, ka visiem *x* šajā segmentā:

$$\left| f(x) - a_0 - \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{P} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{P} \right) \right| < \epsilon \ .$$

No šīs formas var iegūt formu, kurā ir tikai sinusi:

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(c_n \sin \left(\frac{2\pi n x}{P} + d_n \right) \right)$$

Kā redzam, šī formula pilnībā atbilst formulai (3), ja par aktivācijas funkciju paņemam h(x)=sin x.

Tāpēc no šīs formulas var uzbūvēt neironu tīklu ar vienu vidējo slāni no *N* neironiem, kas aproksimēs funkciju *f*:

[Bilde]

1) Ieejā tīkls saņem skaitli *x*.

2) Pēc tam *n*-tais vidējā slāņa neirons saņem ieejā skaitli

$$\frac{2\pi n x}{P} + d_n \ ,$$

3) Par neironu aktivācijas funkciju ņemsim $h(x) = \sin x$, tātad izejā tas izdos skaitli $\sin\left(\frac{2\pi n x}{P} + d_n\right)$.

4) Pēc tam tīkla izejā šos sinusus lineāri kombinē ar

koeficientiem a_0, c_n un iegūto summas skaitli izdod tīkla izejā.

No teorēmas par Furjē rindām uzreiz seko, ka šādi sinus-neironu tīkli ir universāls skaitļošanas līdzeklis:

Teorēma (universālās aproksimācijas teorēma tīkliem ar sinus-neironiem, viena argumenta funkciju gadījums). Atbilstoši izvēloties vidējā slāņa sinus-neironu skaitu un atbilstoši izvēloties tīkla parametru vērtības, jebkurai dotai vienmērīgi nepārtrauktai funkcijai **f** dotajā **segmentā [a, b]** un jebkurai dotai precizitātei var izveidot neironu tīklu **ar vienu vidējo slāni**, kas aproksimēs **f** ar uzdoto precizitāti.

Šo teorēmu var vispārināt arī **vairāku argumentu funkcijām,** izmantojot teorēmu par vairākkārtīgām Furjē rindām (*multiple Fourier series*):

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{m} \in Z^p} c_{\boldsymbol{m}} e^{i \boldsymbol{m} \boldsymbol{x}} \quad ,$$

kur **x** ir vektors *p*-dimensiju telpā, **m** – vektori no *p* veseliem skaitļiem, un summēts tiek pa visiem tādiem **m**.

To visu redzot, varam secināt, ka (vienslāņa) neironu tīkli ir Furjē rindu vispārinājums, kur *sin* un *cos* funkciju vietā ir atļauts izmantot gandrīz jebkuras citas funkcijas. Vēsturiski gan neironu tīkli tika izgudroti savādākā ceļā: kā reālo smadzeņu neironu darbības vienkāršots atdarinājums, un tur jau no paša sākuma figurē daudzi slāņi, nevis viens.

[Ko analoģija ar Furjē rindām varētu dot neironu tīkliem? Furjē rindas ātri konverģē, pateicoties funkciju *sin nx*, *cos nx* savstarpējai ortogonalitātei (sk. augstāk par funkciju telpām. Vai neironu tīkliem formulā (3) nebūtu izdevīgi uzturēt funkciju $h(a_i x + b_i)$ ortogonalitāti dažādiem *i*?]

Universālās aproksimācijas teorēma

Sk. manas lekcijas **Neironu tīkli datizracē** beigu daļu.

Mājas darbi

1.uzdevums. Aprēķiniet dažus Furjē rindas koeficientus ReLU funkcijai ($x<0: f(x)=0; x \geq 0: f(x)=x$) segmentā $[-1,1]$. Izmantojiet formulas $\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x ; \int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x$.

Parādiet visus aprēķina soļus.

2.uzdevums. Aplūkosim neironu tīklus, kuros ir tikai **viens** vidējā slāņa neirons, kura aktivācijas funkcija ir kāds fiksēts kvadrātisks polinoms $ax^2+bx+c\,; a\neq 0$. Parādiet, kā uzbūvēt šāda veida tīklu, kas spēj izrēķināt citu kvadrātisku polinomu $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

3.uzdevums. Uzrakstiet vismaz 1500 zīmes garu sacerējumu par universālās aproksimācijas teorēmām neironu tīkliem.

4.uzdevums. (neobligāts, atzīmei 10, i-iespējai) Aplūkosim neironu tīklu, kurā ir tikai **divi** vidējie slāņi, **katrā pa vienam** neironam, kuru aktivācijas funkcija ir x^2 . a) Parādiet, ka šādi tīkli rēķina tikai polinomus, kuru pakāpe nepārsniedz 4. b) Vai tie spēj izrēķināt jebkuru tādu polinomu?