Mana personīgā lapa – šeit.

Adrese komentāriem: Karlis.Podnieks@lu.lv

Formālisms kā reālās matemātikas filozofija: 14 argumenti

Kārlis Podnieks, LU profesors

Latvijas Universitātes
73.zinātniskā konference
2015.gada 13.februārī

Šī referāta pamatā ir raksts

K.Podnieks. **Fourteen Arguments in Favour of a Formalist Philosophy of Real Mathematics**.

To man divreiz neizdevās publicēt, t.sk. vienreiz – īru filozofu žurnālā *Minerva*. Atteikuma iemesli abos gadījumos netika minēti – tikai "mēs to nevaram publicēt". Tagad ceru, ka šo rakstu man izdosies publicēt BMJC (redkolēģija tam ir pietiekami kvalificēta...).

Alexander Grothendieck, 1928-2014

1971: atvadas no matemātikas?

http://www.grothendieckcircle.org/

Matemātikas filozofijas divas karojošās puses

Paši matemātiķi atrodas vidū starp abām šīm pusēm.

Dāvids Hilberts: Matemātika ir tas, ko ar to saprot kompetenti cilvēki.

Pirmajā brīdī skan pat it kā drosmīgi un nekaunīgi. Bet īstenībā ar tādu pozīciju nav ko lepoties: sakarīgāk pateikt neprotam, un tāpēc “nostājamies pozā”!

Bet tie, kuri par matemātiku mēģina izdomāt kaut ko līdz galam un “pateikt sakarīgi”, parasti nonāk vienā no galējām pozīcijām – **platonismā** vai **formālismā**.

Modernie “dziļdomātāji” vairāk simpatizē platonismam ar tā “noslēpumiem”, “ideju pasauli”, “pasaules mīklām” un citu mistiku. Turpretim ļoti vienkāršo formālisma filozofiju šobrīd vairākums, liekas, uzskata par “diskreditētu pozīciju”, jo tā liekas attēlojam matemātiku kā *bezjēdzīgu spēli ar simbolu virknēm*. Tāpēc formālisma piekritēji ir pat sākuši *kaunēties* no paša šī termina, mēģinot piedāvāt citus – it kā mazāk sakompromitētus terminus, piemēram, racionālisms.

Savā rakstā esmu centies apkopot galvenos argumentus, ko formālisti var izvirzīt savas pozīcijas aizstāvībai un uz kuriem viņu pretinieki, manuprāt, pagaidām nav spējuši pietiekami nopietni atbildēt.

Aksiomas matemātikā...

Pamatproblēmu visvieglāk ir noformulēt, noskaidrojot, kā cilvēki izturas pret **aksiomām**.

Aptuveni līdz 1830.gadam matemātiķi darbojās bez aksiomām (izņēmums – ģeometrija, kurai jau no Eiklīda laikiem bija ne visai pilnīga aksiomu sistēma).

Bet pēdējo 200 gadu laikā matemātiķi ir nopietni strādājuši pie visu galveno matemātikas teoriju aksiomatizācijas. Kaut kādi rezultāti ir sasniegti:

naturālo (veselo nenegatīvo) skaitļu aritmētikas aksiomu sistēma (t.s. Peano aritmētika):

$x=x$,
$x=y \to y=x$,
$x=y \to (y=z \to x=z)$,
$x=y \to x+1=y+1$,
$\neg(0=x+1)$,
$x+1=y+1 \to x=y$,

x+0=x,
x+(y+1)=(x+y)+1,
x*0=0,
x*(y+1)=(x*y)+x,

$$B(0) \wedge \forall x (B(x) \rightarrow B(x+1)) \rightarrow \forall x B(x)$$

(B – jebkura formula PA valodā).

aksiomātiskā kopu teorija ZFC,

kategoriju teorija, toposi utt.

Nu jau dažus gadus mums ir šai ziņā vismodernākā **homotopy type theory** **(**Vladimir Voevodsky)

Bet savā praksē vairums matemātiķu turpina strādāt neformālā līmenī, bez aksiomām (bieži tās nemaz nezinot).

Platonisms

No tā it kā varētu secināt, ka matemātiskie objekti (veselie skaitļi, reālie skaitļi, bezgalīgās kopas utt.) ir pastāvējuši vēl pirms aksiomatizācijas, tātad tie eksistē **neatkarīgi no aksiomām** (ar aksiomu palīdzību mēs tikai mēģinām aprakstīt to īpašības). Un matemātiķu šodienas sekmīgā darbošanās "bez aksiomām" šķiet šo viedokli apstiprinām...

Tas tad arī ir **platonisms**: uzskats ("*fīlings*"), ka matemātiskie objekti eksistē neatkarīgi no aksiomām. Ar aksiomu palīdzību mēs varam censties aprakstīt šo objektu īpašības, bet līdz galam tas mums var arī neizdoties. Objekti ir primāri, aksiomas – sekundāras.

Gēdela nepilnības teorēma it kā liecina par labu šim "fīlingam": esot tādi patiesi apgalvojumi par veselajiem skaitļiem, ko cilvēks pierādot pavisam viegli, bet kurus neesot iespējams izvest no aksiomām! [?]

Bet ko tas īsti nozīmē – "objekti eksistē neatkarīgi no aksiomām"? **Kur** tad tie eksistē – fiziskajā pasaulē vai kādā īpašā ideju pasaulē? Un kā cilvēki iegūst par tiem informāciju – ar kādu īpašu intuīciju? Ir diezgan mokoši tādu "fīlingu" skaidrot skeptiķiem

4 min

Formālisms

Tā ir pretējā galējība: formālisti uzskata, ka matemātiķiem tikai liekas, ka viņi strādā bez aksiomām, īstenībā viņi savā domāšanā izmanto neapzinātas (**implicītas**) aksiomas. Ikvienas savas teorēmas pierādījumā matemātiķis taču var pamanīties izmantot tikai ierobežotu skaitu pieņēmumu par savu objektu īpašībām. Šos pieņēmumus vajag uzrakstīt atklāti (**eksplicīti**) un kolekcionēt, veidojot šo objektu aksiomātisko teoriju.

Vai varētu gadīties, ka mūsu objekti ir tik sarežģīti, ka minētā aksiomu kolekcionēšana nekad nebeidzas – ik pa laikam uzrodas jaunas neapšaubāmas aksiomas, kas būtu jāliek kolekcijai klāt? Un vai šīs jaunās aksiomas visiem matemātiķiem tiešām liksies vienādi neapšaubāmas?

Formālisti iesaka ļoti vienkāršu šīs problēmas risinājumu: beigsim mocīties, centīsimies visu aksiomatizēt, un pētīsim tikai to, kādas teorēmas no kādām aksiomām var izvest.

Par to taču matemātiķi nekad nestrīdas? Var strīdēties, kādas aksiomas ir "labākas" vai "pareizākas", bet taču ne par to, "*kas no kā seko*"!

Praktiski strādājošie matemātiķi "darbojas kopu teorijas ZFC ietvaros" – tam viņi labprāt piekritīs (lai liek viņus mierā...). Bet tiem matemātiķiem, kuri strādā "frontes pirmajās līnijās" (lielo kardināļu kopu teorijā, kategoriju teorijas līmenī un vēl augstāk – "tur, kur Grotendīks") prasība atklāti formulēt savas aksiomas ir obligāta, to neapšauba pat visticīgākie platonisti...

Paši matematiķi...

Dzīiļi sirdī matemātiķi ir **platonisti**: viņiem ir sajūta ("fīlings"), ka viņu pētamie objekti (piemēram, veselie skaitļi) eksistē neatkarīgi ne tikai no aksiomām, bet arī no cilvēku domāšanas vispār, un pat, ka tie ir eksistējuši vēl pirms Lielā Sprādziena...

[Rakstā skaidrots, kāpēc šī platoniskā pozīcija nemaz nav smieklīga, un ir **reāli produktīva** (tas **ir** būtiski!). Tāpat ir nepieciešama arī formālistiskā pozīcija – visu vajag censties aksiomatizēt, lai novērstu intuīcijas defektus – un ne tikai tāpēc.]

Bet, ja matemātiķiem kāds “no malas” palūdz šo savu pārliecību par objektu neatkarīgo eksistenci izskaidrot sīkāk, tad – nespēdami to izskaidrot sakarīgi – daudzi no viņiem labprāt atzīst, ka īstenībā ir ... formālisti. Jo tā ir viegli izstāstāma un sakarīga pozīcija (kaut arī sirdī liekas, ka tā ignorē daļu no matemātikas burvības...).

Tāpēc Rubens Heršs 1979.gadā piedāvāja aforismu:

Matemātiķi ir platonisti darbdienās,
un formālisti – svētdienās.

14 problēmas – 14 argumenti

Rakstā ir aplūkotas matemātikas filozofijas problēmas un izvirzīti 14 argumenti par labu to formālistiskam risinājumam. Oponenti tiek laipni aicināti atbildēt...

Seko saraksts:

1. Aksiomatizācija likvidē jebkādas metafiziskas mocības “ap matemātiku”.

2. Kopu teorijas paradoksi (20 gs. sākumā) un to mācības – Totāli nekļūdīga matemātiskā intuīcija nav iespējama.

3. Matemātikas produktivitātei ir vajadzīga kā platoniska attieksme pret objektu eksistenci, tā arī aksiomatizācija.

4. Formālas aksiomas un teorēmas bez interpretācijas nav bezjēdzīgas, tās ir interpretējamas vairākos veidos, un tāpēc ir plašāk lietojamas.

5. Reālā matemātika īstenībā tiek attīstīta formālos ietvaros, tāpēc formālās valodas un formālās teorijas ir labs reālās matemātikas modelis.

6. Formālās teorijas, ja tās uzraksta “uz papīra”, kļūst par fiziskā Visuma sastāvdaļu. Tāpēc matemātikas fantastiskā lietojamība, acīm redzot, vienkārši ir iebūvēta fiziskā Visuma struktūrā.

7. Gēdela pirmo nepilnības teorēmu varam izmantot kā argumentu par labu platonismas tikai tad, ja ticam mūsu veselo skaitļu intuīcijas absolūtam nekļūdīgumam. Bet kāds labums no tādas ticības?

8. Gēdela otrā nepilnības teorēma: aksiomu bezpretrunības absolūti pierādījumi nav iespējami.

9. Veselo skaitļu aritmētikas bezpretrunība ir tikai hipotēze. Vai mums vajag kaut ko vairāk par to?

10. Iespēja “saturiski” (t.i. ārpus jebkādām teorijām) analizēt formālu teoriju ir ilūzija. Spriedumi par formālu teoriju kopumā (piemēram, par tās bezpretrunību) neizbēgami ir teorētiski. Un tātad ir jāpasaka atklāti, kuru teoriju savā analīzē mēs izmantojam.

11. Gerhards Gencens pierādīja veselo skaitļu aritmētikas bezpretrunību. Tas ir spīdošs matemātisks sasniegums, taču – bez filozofiskas nozīmes.

12. Gēdela nepilnības teorēmas dod ļoti vispārīgus “teorētiskus” pareģojumus, kuru patiesums ir 20.gadsimtā ir daudzkārt “empīriski” apstiprinājies (piemēram, tika pierādīta kontinuuma problēmas neatrisināmība).

13. Matemātiķi var strīdēties par to, kuras aksiomas ir “patiesas”, bet viņiem ir pilnīga saskaņa par to, “kas no kā seko”.

14. Ja veselo skaitļu aritmētikas aksiomas izrādīsies pretrunīgas, tas nozīmēs, ka pretrunīgs ir pats intuitīvais priekšstats par mums it kā “labi zināmo” bezgalīgo virkni 0, 1, 2, 3, ...

Aplūkosim tikai 7. un 13. argumentu, vairāk laika nav palicis...

8 min

Gēdela nepilnības teorēmas: maldu ceļš

Visnopietnākā kļūda – secināt no Gēdela teorēmām, ka cilvēks var pavisam viegli pierādīt patiesus apgalvojumus par veseliem skaitļiem, kurus nevar izvest no aritmētikas aksiomām.

Maldu ceļš ir apmēram šāds:

Atcerēsimies, kā Gēdels pierādīja savu pirmo nepilnības teorēmu:

Ņemam jebkuru formālu teoriju T, kurā var pierādīt naturālo skaitļu (0, 1, 2, 3, ...) pamatīpašības, piemēram, pirmās pakāpes (Peano) aritmētiku PA (sk. augstāk).

Uzkonstruēsim aritmētikas valodā formulu G[T], kas apgalvo, ka “no T aksiomām nevar izvest G[T]”. Tas ir kaut kas līdzīgs meļa paradoksam:

P: “P ir aplams”;

G[T]: “no T aksiomām nevar izvest G[T]”.

Teorijas T aksiomas ir pietiekamas, lai tādu formulu varētu uzbūvēt. [Mūslaiku programmētājiem šī iespēja ir acīmredzama: vajag tikai visas formulas un izvedumus nokodēt ar skaitļiem.]

No otras puses, kā formula aritmētikas valodā, G[T] izsaka kādu noteiktu apgalvojumu par naturālajiem skaitļiem.

Gēdels pierādīja, ka ja no T aksiomām izdotos izvest G[T], tad varētu izvest arī negāciju $\neg G[T]$, t.i. tad T būtu pretrunīga teorija.

Tātad: ja teorija T **nav** pretrunīga, tad apgalvojumu G[T] no T aksiomām izvest nevar. Bet ko tad G[T] apgalvo? Apgalvo, ka “no T aksiomām nevar izvest G[T]”. Tātad G[T] ir patiess apgalvojums – un tas ir patiess arī kā apgalvojums par naturālajiem skaitļiem!

Izrādās, pavisam viegli esam atraduši patiesu apgalvojumu par naturālajiem skaitļiem, ko nevar izvest no teorijas T aksiomām.

Tātad cilvēks ir pārāks
par (jebkuras!) teorijas T aksiomām!

(Atceramies, ka T ir **jebkura** formāla teorija T, kurā var pierādīt naturālo skaitļu (0, 1, 2, 3, ...) pamatīpašības.)

[Līdzīgā veidā var pārliecināt sevi par to, ka cilvēka domāšana ir pārāka par jebkuru datoru. Tā to uztver arī Rodžers Penrouzs.]

Esam nomaldījušies...

Gēdela nepilnības teorēmas: kā ir īstenībā?

Ånalizēsim:

Ja mūsu teorijas T aksiomas **ir pretrunīgas**, tad no tām var izvest jebko, arī formulu G[T]. Tātad šai gadījumā G[T] ir **aplams** apgalvojums: “no T aksiomām nevar izvest G[T]” (bet var taču!).

Ja T aksiomas **nav pretrunīgas**, tad no tām formulu G[T] nevar izvest. Tātad šai gadījumā G[T] ir **patiess** apgalvojums: “no T aksiomām nevar izvest G[T]” (tiešām, nevar!).

Secinājums: formulas G[T] apgalvojums ir **ekvivalents** apgalvojumam “teorijas T aksiomas nesatur pretrunas”.

Tātad: lai konstatētu formulas G[T] patiesumu, **ir jābūt pārliecinātam** par to, ka teorijas T aksiomas nesatur pretrunas.

Pašās T aksiomās šāda pārliecība nav ielikta. Rezultāts: šīs aksiomas nespēj pierādīt formulas G[T] patiesumu.

Bet: minēto pārliecību nav grūti T aksiomām pielikt klāt! Apgalvojumu “teorijas T aksiomas nesatur pretrunas” var uzrakstīt ar aritmētikas formulu, apzīmēsim to ar

Con[T] (T *is consistent*).

Diezgan “ķēpīgi” pierādāms, bet Gēdela konstatēts fakts:

no T aksiomām var izvest formulu $Con[T] \rightarrow G[T]$.

Tātad, lai no pārliecības, ka T aksiomas nesatur pretrunas, izvestu, ka G[T] ir patiess apgalvojums, **cilvēks nemaz nav vajadzīgs, pietiek ar teorijas T aksiomām!**

Tātad no Gēdela teorēmām **neseko**, ka cilvēks ir pārāks par aritmētikas aksiomām!

Esam atgriezušies uz pareizā ceļa...

13 min

Kontinuuma problēma

(13.arguments)

Visu reālo skaitļu kopas apjoms ir $2^{\aleph_0}$.

1878.gadā Georgs Kantors izvirzīja hipotēzi: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (t.i.

starp naturālo skaitļu kopas un reālo skaitļu kopas apjomu nekādi starp-apjomi neatrodas).

$2^{\aleph_0} = \aleph_{17}$ (no vienas puses, tas ir N.Luzina joks, no otras: Pols Koens 1963.gadā pierādīja, ka šāds (un līdzīgi) pieņēmumi nerunā pretī kopu teorijas (ZFC) aksiomām).

W. Hugh Woodin

Attēls no Adam Walanus, Portrety, 2013

V. Hjū Vudins dzimis 1955.gada 23.aprīlī.

Bils Geitss dzimis 1955.gada 28.oktobrī.

William Hugh Woodin

ir viens no lielo kardināļu teorijas korifejiem. Viņš nesen izvirzījis nopietnus, bet diezgan sarežģītus argumentus, ka īstenībā:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_2 .$$

Kaut arī Vudins sevi apzīmē par conditional platonist", viņa sarežģītie argumenti apelē pie "labām" aksiomām...

Arī **formālists varētu strādāt kopā ar šādu platonistu** – ja reiz abiem ir iepatikušās vienādas aksiomas...